

Κεφάλαιο 5

Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων

5.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε φανερό ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης ενός συστήματος παίζουν καθοριστικό ρόλο στη χρονική συμπεριφορά του. Από όλα τα χαρακτηριστικά της χρονικής συμπεριφοράς το κυριότερο είναι η **ευστάθεια** σε κάθε χρονική στιγμή που καθορίζει και την πρακτική χρησιμότητα του συστήματος.

Υπενθυμίζεται ότι ο συσχετισμός των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης (πόλων) με τη μεταβατική απόκριση είναι ο εξής:

1. Όταν οι ρίζες βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, η μεταβατική απόκριση του συστήματος μηδενικής εισόδου (δηλαδή, όταν το σύστημα διεγείρεται μόνο από τις αρχικές του συνθήκες) μηδενίζεται, καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο.
2. Όταν ένα ή περισσότερα ζεύγη ριζών βρίσκονται επάνω στον άξονα των φανταστικών αριθμών, αλλά δεν υπάρχουν ρίζες στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, η μεταβατική απόκριση μηδενικής εισόδου είναι ημιτονοειδής ταλάντωση σταθερού πλάτους.
3. Όταν μία ή περισσότερες ρίζες βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, η μεταβατική απόκριση του συστήματος μηδενικής εισόδου αυξάνει, ως προς το πλάτος, καθώς ο χρόνος αυξάνει.

Στα γραμμικά συστήματα η πρώτη περίπτωση χαρακτηρίζεται ως **ευσταθής**, ενώ οι δύο τελευταίες περιπτώσεις χαρακτηρίζονται **ασταθείς**.

Η έννοια της ευστάθειας περιλαμβάνει, τόσο την **απόλυτη**, όσο και τη **σχετική ευστάθεια**. Η απόλυτη ευστάθεια αναφέρεται στο αν ένα σύστημα είναι ευσταθές ή ασταθές. Η σχετική ευστάθεια αναφέρεται στο «πόσο» ευσταθές είναι ένα

σύστημα, δηλαδή πόσο εύκολα ή δύσκολα μεταπίπτει σε αστάθεια. Η σχετική ευστάθεια ποσοτικοποιείται με συγκεκριμένα μεγέθη που λέγονται **περιθώρια ευστάθειας**.

5.2 Η έννοια της ευστάθειας για συστήματα μηδενικής εισόδου

Έστω το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.1)$$

όπου $x(t)$ είναι το διάνυσμα κατάστασης και $u(t)$ είναι το διάνυσμα εισόδου.

Για μηδενική είσοδο ($u(t) = 0$) προκύπτει η ομογενής εξίσωση

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (5.2)$$

της οποίας μία προφανής λύση είναι η $x(t) = 0$. Η λύση αυτή ορίζεται ως **κατάσταση ισορροπίας** του συστήματος. Η ευστάθεια μηδενικής εισόδου ορίζεται τώρα ως εξής:

Ορισμός 5.1

Αν η κατάσταση $x(t)$, που υπόκειται στην πεπερασμένη αρχική συνθήκη $x(t_0)$, επιστρέφει στην κατάσταση ισορροπίας $x(t) = 0$, καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο, τότε το σύστημα λέγεται **ευσταθές**. Σε διαφορετική περίπτωση, το σύστημα λέγεται **ασταθές**. Αυτός ο τύπος ευστάθειας λέγεται επίσης **αυμπτωτική ευστάθεια**.

Ένας περισσότερο μαθηματικός ορισμός της ευστάθειας είναι ο εξής:

Ορισμός 5.2

Ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα μηδενικής εισόδου λέγεται ευσταθές, αν για κάθε πεπερασμένη αρχική κατάσταση $x(t_0)$ υπάρχει ένας θετικός αριθμός M , που εξαρτάται από το $x(t_0)$, έτσι ώστε:

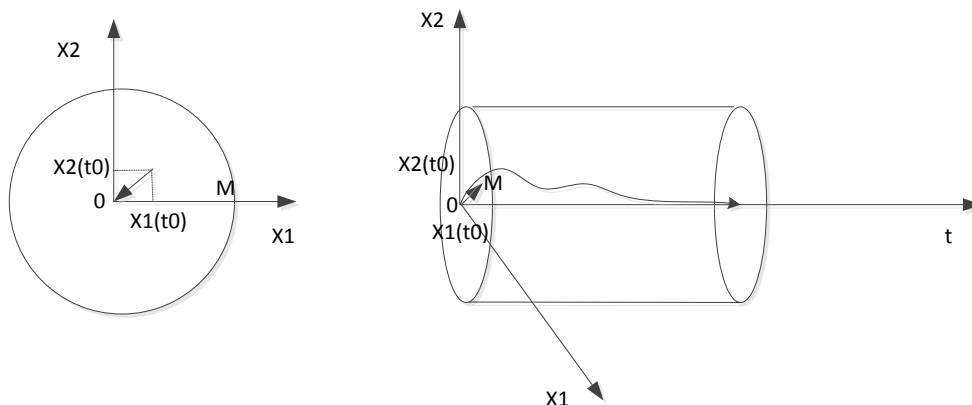
$$\|x(t)\| < M, \quad \forall t \geq t_0 \quad (5.3)$$

και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad (5.4)$$

όπου $\|x(t)\|$ είναι η νόρμα του διανύσματος κατάστασης $x(t)$.

Η συνθήκη (5.3) σημαίνει ότι η μετάβαση του διανύσματος κατάστασης για $t \geq t_0$, όπως περιγράφεται με τη νόρμα του $x(t)$, πρέπει να είναι φραγμένη. Η συνθήκη (5.4) σημαίνει ότι το σύστημα πρέπει να φτάνει την κατάσταση ισορροπίας, καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Η ευστάθεια της συνθήκης (5.4) λέγεται ασυμπτωτική ευστάθεια. Η ερμηνεία του ορισμού της ευστάθειας δίνεται στο Σχ. 5.1.



Σχήμα 5.1. Ευστάθεια στο χώρο κατάστασης

Επειδή για μηδενική είσοδο ισχύει η σχέση $x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0)$, όπου $\Phi(t - t_0) = [\varphi_{ij}(t - t_0)]$ είναι ο μεταβατικός πίνακας του συστήματος, έπεται ότι η σχέση (5.4) είναι ισοδύναμη με τη σχέση,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t - t_0)\| = 0 \quad (5.5)$$

Όπως είναι γνωστό, ο μεταβατικός πίνακας δίνεται και από τη σχέση,

$$\Phi(t - t_0) = L^{-1} \left[\frac{Adj(sI - A)}{|sI - A|} \right] \quad (5.6)$$

Επειδή, $|sI - A| = 0$ είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος, η (5.6) συνεπάγεται ότι η χρονική απόκριση του $\Phi(t)$ καθορίζεται από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Άρα η (5.5) προϋποθέτει ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης πρέπει να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

5.3 Ευστάθεια για συστήματα μη - μηδενικής εισόδου

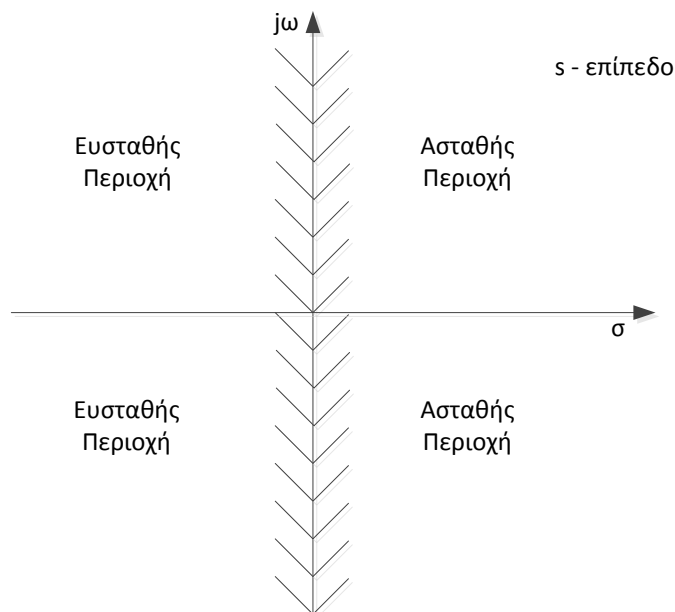
Στην προηγούμενη παράγραφο δόθηκαν οι ορισμοί της ευστάθειας γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων συστημάτων για την περίπτωση μηδενικών εισόδων. Ωστόσο, μπορεί ναδειχθεί ότι οι συνθήκες ευστάθειας για τα συστήματα αυτά είναι ανεξάρτητες των εισόδων. Ένας άλλος ορισμός της ευστάθειας είναι ο εξής:

Ορισμός 5.3

Ένα σύστημα είναι ευσταθές, αν η έξοδός του είναι φραγμένη για κάθε φραγμένη είσοδο. Με άλλα λόγια, αν $u(t)$ και $y(t)$ είναι η είσοδος και η έξοδος, αντίστοιχα, ενός συστήματος μιας εισόδου – μιας εξόδου, τότε,

$$|u(t)| \leq N < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq M < \infty, \quad \forall t \geq t_0 \quad (5.7)$$

Όπως στην προηγούμενη περίπτωση, έτσι και στην περίπτωση ευστάθειας φραγμένης εισόδου – φραγμένης εξόδου, αποδεικνύεται ότι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Από το γεγονός αυτό συμπεραίνεται ότι η ευστάθεια των γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων συστημάτων καθορίζεται από τις θέσεις των πόλων του συστήματος επάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Ο άξονας των φανταστικών αριθμών περιλαμβάνεται στην ασταθή περιοχή.



Σχήμα 5.2. Ευσταθείς και ασταθείς περιοχές του μιγαδικού επιπέδου

5.4 Μέθοδοι προσδιορισμού της ευστάθειας γραμμικών συστημάτων – Αλγεβρικά κριτήρια

Αν και θεωρητικά η ευστάθεια ενός συστήματος μπορεί να μελετηθεί από την κρουστική του απόκριση, ή από τον μεταβατικό πίνακα, ή βρίσκοντας τις ρίζες της χαρακτηριστικής του εξίσωσης, ωστόσο οι τρόποι αυτοί έχουν πολλές πρακτικές και υπολογιστικές δυσκολίες, ιδίως όταν το σύστημα είναι ανώτερης τάξης. Γι' αυτό στην πράξη η μελέτη της ευστάθειας γραμμικών συστημάτων γίνεται με τη βοήθεια κατάλληλων κριτηρίων που δίνουν απευθείας πληροφορία σχετικά με την ευστάθεια αποφεύγοντας τον υπολογιστικό φόρτο. Τα **κριτήρια ευστάθειας** χωρίζονται σε αλγεβρικά και εποπτικά. Τα **αλγεβρικά κριτήρια** εξετάζουν την απόλυτη ευστάθεια ενός συστήματος χωρίς να χρειάζεται η επίλυση της χαρακτηριστικής του εξίσωσης. Αντίθετα, τα **εποπτικά κριτήρια** εξετάζουν τόσο την απόλυτη, όσο και τη σχετική ευστάθεια ενός συστήματος και βασίζονται σε κατάλληλα διαγράμματα. Τα κριτήρια που θα μελετηθούν στη συνέχεια της παραγράφου αυτής είναι τα ακόλουθα:

1. **Κριτήρια Routh – Hurwitz:** Είναι αλγεβρικές μέθοδοι που δίνουν πληροφορία για την απόλυτη ευστάθεια, εξετάζοντας αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, χωρίς όμως να υπολογίζουν τις ρίζες.
2. **Κριτήριο Nyquist:** Η μέθοδος αυτή είναι εποπτική και δίνει πληροφορία τόσο για την απόλυτη, όσο και για τη σχετική ευστάθεια, εξετάζοντας τη συμπεριφορά του διαγράμματος Nyquist της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου.
3. **Γεωμετρικός τύπος των ριζών:** Είναι και αυτή μία εποπτική μέθοδος και βασίζεται στο διάγραμμα του γεωμετρικού τύπου των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης καθώς μεταβάλλεται η σταθερά ενίσχυσης.
4. **Διάγραμμα Bode:** Η μελέτη της ευστάθειας βασίζεται στο διάγραμμα μέτρου και φάσης της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου, με την προϋπόθεση ότι αυτή δεν έχει πόλους και μηδενικά στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.
5. **Κριτήριο ευστάθειας Lyapunov:** Η μέθοδος αυτή καθορίζει την απόλυτη ευστάθεια εξετάζοντας τις ιδιότητες μιας ειδικής συνάρτησης που λέγεται συνάρτηση Lyapunov.

Ως εποπτικά κριτήρια συναντώνται στη διεθνή βιβλιογραφία και τα κριτήρια **Nichols** και **Black**.

Ας σημειωθεί ότι τα κριτήρια 1 – 4 αναφέρονται σε γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα μιας εισόδου – μιας εξόδου. Αντίθετα, το κριτήριο Lyapunov μπορεί να εφαρμοστεί και μη γραμμικά ή/και χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων.

5.4.1 Κριτήριο Routh

Το κριτήριο Routh ανήκει στα αλγεβρικά κριτήρια. Στόχος είναι ο προσδιορισμός της απόλυτης ευστάθειας χωρίς να απαιτείται η επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης του συστήματος. Η σημασία του έγκειται στον υπολογιστικό φόρτο, ιδίως όταν το σύστημα είναι μεγάλης τάξης και κατά συνέπεια η χαρακτηριστική εξίσωση είναι μεγάλου βαθμού.

Έστω ότι η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (5.8)$$

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.1

Η χαρακτηριστική εξίσωση (5.8) έχει μία ή περισσότερες ρίζες στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, όταν

- ένας τουλάχιστον συντελεστής της εξίσωσης είναι μηδενικός ή / και

- οι συντελεστές της εξίσωσης είναι ετερόσημοι. □

Οι συνθήκες αυτές είναι αναγκαίες. Η μη ικανοποίησή τους δεν συνεπάγεται ότι όλες οι ρίζες της εξίσωσης (5.8) βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Κατασκευή του πίνακα Routh

Με βάση τους συντελεστές της (5.8) σχηματίζεται ο παρακάτω πίνακας:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array}$$

Όπου

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}$$

Το κριτήριο Routh εκφράζεται από το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.2

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.8) βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, **αν και μόνον αν** οι συντελεστές της πρώτης στήλης του πίνακα Routh είναι ομόσημοι. Ο αριθμός των αλλαγών προσήμου (εφόσον υπάρχουν) στην πρώτη στήλη, ισούται με τον αριθμό των ριζών της (5.8) που βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Παράδειγμα 5.1

Έστω $p(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$. Χωρίς να εφαρμόσουμε το κριτήριο Routh, ξέρουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, επειδή οι συντελεστές του $p(s)$ είναι ετερόσημοι. Εφαρμόζοντας το κριτήριο Routh έχουμε

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & -4 & 6 \\ s^1 & 2.5 & 0 \\ s^0 & 6 & 0 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη στήλη του πίνακα Routh εμφανίζει δύο αλλαγές προσήμου. Άρα η $p(s) = 0$ έχει δύο ρίζες στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Παράδειγμα 5.2

Έστω $p(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$. Στην περίπτωση αυτή, δεν ικανοποιείται αναγκαία συνθήκη για να έχει η $p(s) = 0$ ρίζα στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Επειδή όμως η συνθήκη δεν είναι και ικανή, η θέση των ριζών θα εξεταστεί με τη βοήθεια του κριτηρίου Routh. Έτσι έχουμε

s^4	2	3	10
s^3	1	5	0
s^2	-7	10	0
s^1	6.43	0	0
s^0	10	0	0

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο αλλαγές προσήμου στην πρώτη στήλη. Άρα, η $p(s) = 0$ έχει δύο ρίζες στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Ειδικές περιπτώσεις

Υπάρχουν ειδικές περιπτώσεις κατά τις οποίες το κριτήριο Routh δεν μπορεί να εφαρμοστεί παρά μόνον αν εφαρμοστούν ειδικά τεχνάσματα. Οι περιπτώσεις αυτές είναι οι εξής:

Περίπτωση μηδενικού στοιχείου στην πρώτη στήλη του πίνακα Routh

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας Routh δεν μπορεί να κατασκευαστεί διότι το στοιχείο που έπεται του μηδενικού στην πρώτη στήλη θα απειρίζεται. Γι' αυτό,

1. Πολλαπλασιάζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(s)$ επί τον παράγοντα $s + a$, $a > 0$, όπου $-a$ δεν είναι ρίζα του $p(s)$.
2. Το κριτήριο Routh εφαρμόζεται στο πολυώνυμο $p'(s) = (s + a)p(s)$.
3. Τα συμπεράσματα σχετικά με την ευστάθεια του $p'(s)$ ισχύουν και για το $p(s)$.

Παράδειγμα 5.3

Έστω το σύστημα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3$. Ζητείται να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος. Ο πίνακας Routh για το σύστημα αυτό είναι

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & 0 & 3 & 0 \\ s^1 & \infty & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

Στο σημείο αυτό η κατασκευή του πίνακα Routh δεν μπορεί να συνεχιστεί. Πολλαπλασιάζουμε το $p(s)$ επί $s+1$ και έχουμε

$$p'(s) = (s+1)p(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 3$$

Οπότε, ο νέος πίνακας Routh είναι

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 5 \\ s^4 & 2 & 4 & 3 \\ s^3 & 1 & 3.5 & 0 \\ s^2 & -3 & 3 & 0 \\ s^1 & 4.5 & 0 & 0 \\ s^0 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

Τα πολυώνυμα $p'(s)$ και $p(s)$ έχουν δύο ρίζες στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Άρα το σύστημα είναι ασταθές.

Περίπτωση μηδενικής γραμμής στον πίνακα Routh

Η κατασκευή του πίνακα Routh δεν μπορεί να συνεχιστεί μετά από μία μηδενική γραμμή. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

1. Σχηματίζουμε το βοηθητικό πολυώνυμο $q(s)$ της γραμμής που προηγείται της μηδενικής.
2. Παραγωγίζουμε το $q(s)$ και συμπληρώνουμε τη μηδενική γραμμή με τους συντελεστές του $q^{(1)}(s)$, όπου $q^{(1)}(s)$ είναι η πρώτη παράγωγος του $q(s)$.
3. Συνεχίζουμε την κατασκευή του πίνακα Routh κατά τα γνωστά.

Παράδειγμα 5.4

Θα μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 3$ με τη βοήθεια του κριτηρίου Routh. Ο πίνακας Routh για το σύστημα αυτό είναι

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 3 \\ s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

Είναι φανερό ότι ο πίνακας Routh δεν μπορεί να κατασκευαστεί μετά την Τρίτη γραμμή. Τα βοηθητικό πολυώνυμο είναι $q(s) = s^4 + 2s^2 + 3$ και η παράγωγός του είναι $q^{(1)}(s) = 4s^3 + 4s$. Σχηματίζουμε τη νέα γραμμή s^3 του πίνακα Routh με τους συντελεστές του $q^{(1)}(s)$ και συνεχίζουμε κατά τα γνωστά.

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 3 \\ s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 4 & 4 & 0 \\ s^2 & 1 & 3 & 0 \\ s^1 & -8 & 0 & 0 \\ s^0 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

Οι δύο αλλαγές προσήμου στην πρώτη στήλη σημαίνουν δύο ρίζες της $p(s) = 0$ στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Άρα το σύστημα είναι ασταθές.

Το κριτήριο Routh μπορεί ακόμη να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να προσδιοριστούν επιτρεπτές περιοχές μεταβολής κάποιων παραμέτρων του συστήματος. Με βάση τη συνθήκη που πρέπει να πληρούν οι συντελεστές της πρώτης στήλης του πίνακα Routh, λύνουμε ένα σύστημα ανισοτήτων από το οποίο προκύπτουν οι επιτρεπτές περιοχές.

Παράδειγμα 5.5

Ζητείται να προσδιοριστούν οι επιτρεπτές περιοχές μεταβολής της σταθεράς ενίσχυσης K , ώστε το σύστημα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(s) = s^3 + 3Ks^2 + (K + 2)s + 4$ να είναι ευσταθές.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & K + 2 \\ s^2 & 3K & 4 \\ s^1 & \frac{3K(K + 2) - 4}{3K} & 0 \\ s^0 & 4 & 0 \end{array}$$

Οι συντελεστές της πρώτης στήλης πρέπει να είναι ομόσημοι, δηλαδή

$$\left. \begin{array}{l} 3K > 0 \\ 3K(K+2) - 4 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} K > 0 \\ K < -2.528, \quad K > 0.528 \end{array}$$

Οι ανισότητες αυτές συναληθεύουν στο διάστημα $K > 0.528$.

5.4.2 Κριτήριο Hurwitz

Το κριτήριο Hurwitz προσδιορίζει αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζες στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, όχι όμως και τον αριθμό των ριζών αυτών.

Έστω και πάλι η χαρακτηριστική εξίσωση (5.8)

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (5.8)$$

Υπολογίζονται οι τιμές των παρακάτω οριζουσών:

$$\Delta_0 = a_n, \quad \Delta_1 = a_{n-1}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \dots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \dots & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & \dots & a_{n-3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & \dots & a_{n-2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}, \text{ για } n \text{ περιττό, ή}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & a_1 & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \dots & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}, \text{ για } n \text{ άρτιο}$$

Το κριτήριο ευστάθειας Hurwitz διατυπώνεται μέσω του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 5.3

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να βρίσκονται οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (5.8) στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο είναι $\Delta_i > 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Παράδειγμα 5.6

Δίνεται το σύστημα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(s) = s^3 + 10s^2 + 11s + 6$. Υπολογίζουμε τις ορίζουσες Hurwitz.

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 104, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 62.4$$

Επειδή όλες οι ορίζουσες είναι θετικές, έπεται ότι το σύστημα είναι ευσταθές.

5.5 Εποπτικά κριτήρια – Διαγράμματα ευστάθειας

Τα εποπτικά κριτήρια ευστάθειας αναφέρονται σε συστήματα μιας εισόδου – μιας εξόδου και απορρέουν από ειδικά διαγράμματα που σχεδιάζονται με βάση τη συνάρτηση μεταφοράς **ανοικτού βρόχου** $G(s)F(s)$. Οι πληροφορίες που παρέχουν, αφορούν τόσο την απόλυτη, όσο και τη σχετική ευστάθεια του **κλειστού συστήματος**.

Επιπλέον, τα διαγράμματα ευστάθειας αποτελούν εργαλεία σχεδιασμού απλών αντισταθμιστών ελέγχου για τα συστήματα μιας εισόδου – μιας εξόδου.

5.5.1 Κριτήριο Nyquist

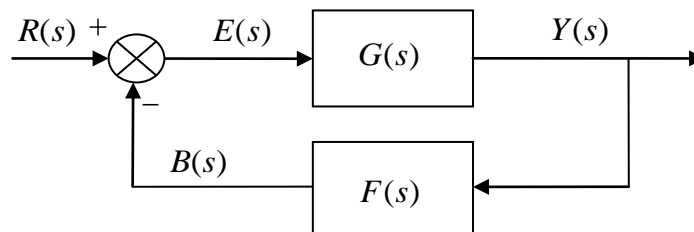
Γενικά

Οι τρόποι μελέτης της ευστάθειας, που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, δεν είναι κατάλληλοι για την περίπτωση που η μελέτη της ευστάθειας ενός συστήματος γίνεται στα πλαίσια της σχεδίασης. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει το κριτήριο ευστάθειας να δίνει πληροφορίες τόσο για την απόλυτη, όσο και για τη σχετική ευστάθεια. Ακόμη, θα πρέπει να δείχνει τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να βελτιωθεί η ευστάθεια μέσω της σχεδίασης. Το κριτήριο Nyquist, που παρουσιάζεται στην παράγραφο αυτή, έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Δίνει την ίδια πληροφορία με τα κριτήρια Routh και Hurwitz, σε ότι αφορά την απόλυτη ευστάθεια.
2. Επιπλέον, δίνει πληροφορία για τη σχετική ευστάθεια ευσταθών συστημάτων: προσδιορίζει το βαθμό ευστάθειας, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να βελτιωθεί η ευστάθεια.
3. Προσδιορίζει την απόκριση του συστήματος στο πεδίο της συχνότητας.

4. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της ευστάθειας συστημάτων με χρονικές καθυστερήσεις.
5. Μπορεί να τροποποιηθεί για μη-γραμμικά συστήματα, καθώς και για συστήματα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων.

Έστω το σύστημα του Σχ. 5.3.



Σχήμα 5.3. Γραμμικό σύστημα κλειστού βρόχου μιας εισόδου – μιας εξόδου

Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος έχει τη μορφή

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)} \quad (5.9)$$

Ο παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς είναι μια ρητή συνάρτηση της μορφής

$$W(s) = 1 + G(s)F(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{s^j (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (5.10)$$

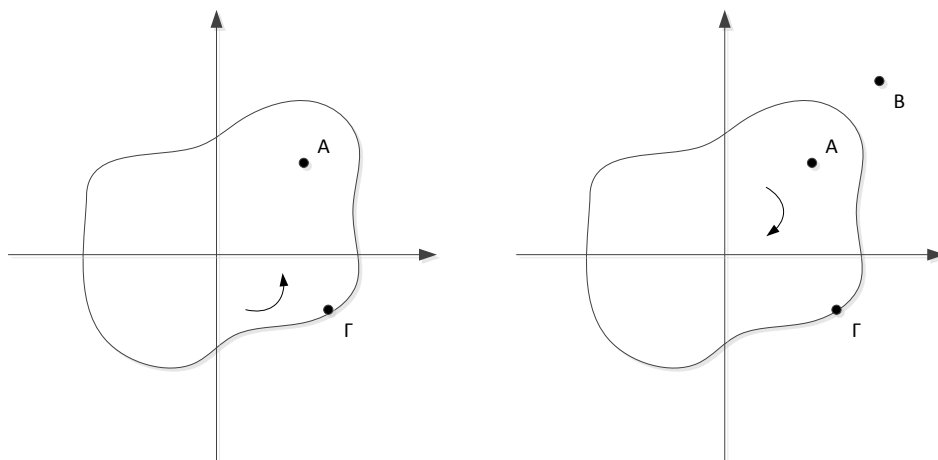
Είναι προφανές ότι η $W(s)$ έχει j πόλους στο σημείο $s = 0$ και n πόλους στα σημεία $-p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Επίσης, η $W(s)$ έχει m μηδενικά στα σημεία $-z_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. Τα μηδενικά της $W(s)$, δηλαδή οι τιμές $-z_1, -z_2, \dots, -z_m$, είναι και ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης του συστήματος, δηλαδή της $W(s) = 0$. Με άλλα λόγια, οι τιμές $-z_1, -z_2, \dots, -z_m$ είναι οι πόλοι του κλειστού συστήματος.

Όπως είναι γνωστό, για να είναι το κλειστό σύστημα ευσταθές, θα πρέπει όλες οι τιμές $-z_1, -z_2, \dots, -z_m$ να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο.

Στοιχεία από τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων

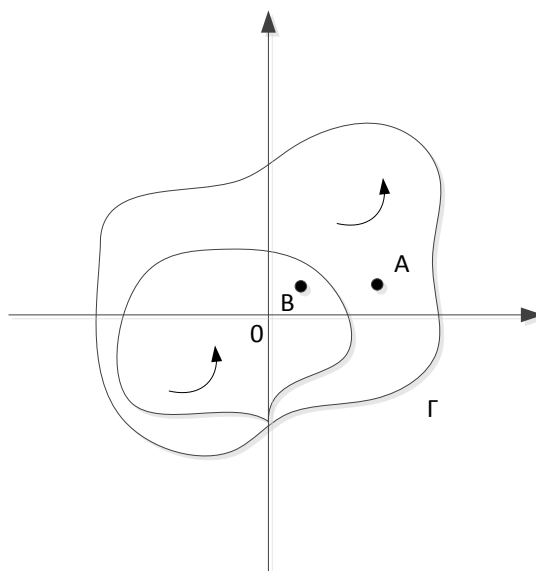
Για τη διατύπωση του κριτηρίου Nyquist είναι απαραίτητες οι παρακάτω έννοιες:

(i) Ένα σημείο ή περιοχή του επιπέδου λέγεται ότι **περικλείεται** από ένα κλειστό δρόμο Γ , αν βρίσκεται αριστερά του δρόμου, σε σχέση με τη φορά διαγραφής του.



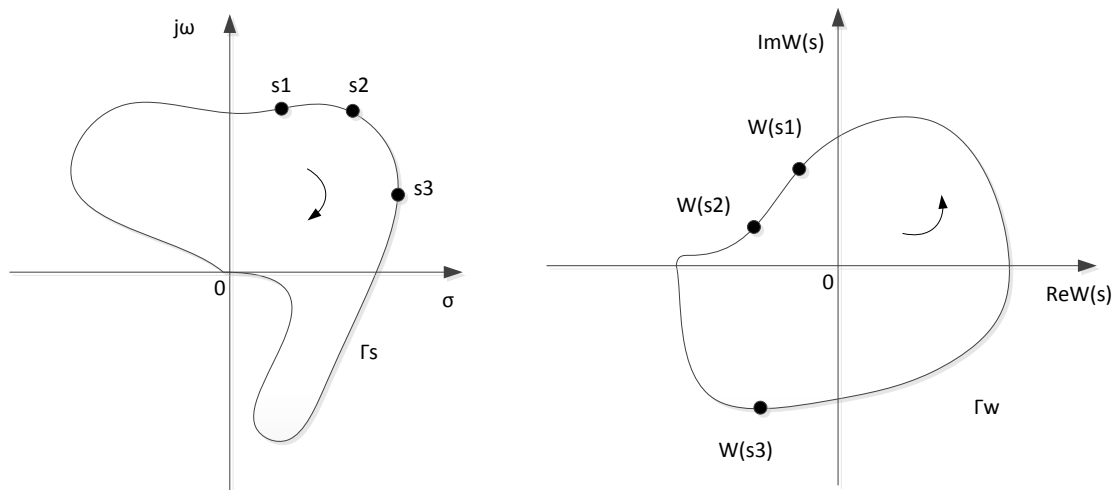
Σχήμα 5.4. Περιοχές που περικλείονται από κλειστούς δρόμους. (α) Περίπτωση αριστερόστροφου δρόμου. (β) Περίπτωση δεξιόστροφου δρόμου.

(ii) Όταν ένα σημείο A περικλείεται από ένα δρόμο Γ , τότε σ' αυτό αντιστοιχεί ένας αριθμός N που δηλώνει **πόσες φορές** ο δρόμος Γ περικλείει το σημείο A . Η τιμή του N καθορίζεται ως εξής: θεωρούμε ένα διάνυσμα από το σημείο A σε ένα αυθαίρετο σημείο s του δρόμου Γ . Στη συνέχεια θεωρούμε ότι το s κινείται επάνω στον δρόμο Γ , μέχρις ότου ξαναφτάσει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε. Ο αριθμός των περιστροφών, που διέγραψε το διάνυσμα, είναι ο αριθμός N .



Σχήμα 5.5. Το σημείο A περικλείεται μία φορά, ενώ το σημείο B δύο φορές.

(iii) Έστω μία μιγαδική συνάρτηση $W(s)$ και ένας κλειστός δρόμος Γ_s στο μιγαδικό επίπεδο. Για κάθε σημείο $s \in \Gamma_s$, η συνάρτηση $W(s)$ σχηματίζει επίσης ένα κλειστό δρόμο Γ_w στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 5.6. Κλειστός δρόμος – μιγαδική συνάρτηση

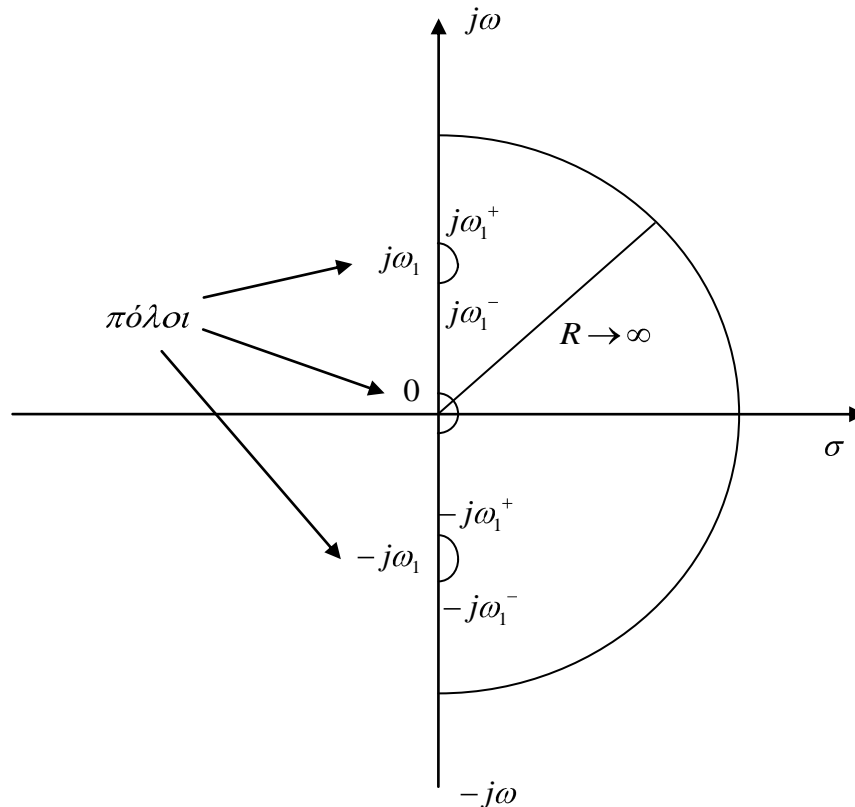
(iv) Από τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.4

Έστω ότι $W(s)$ είναι μία ρητή, αναλυτική συνάρτηση της μορφής (5.10), της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή s παίρνει τιμές από τα σημεία ενός κλειστού δρόμου Γ_s . Έστω ότι Z είναι ο αριθμός των μηδενικών και P είναι ο αριθμός των πόλων της $W(s)$ που περικλείονται από τον κλειστό δρόμο Γ_s . Τότε, ο αντίστοιχος δρόμος Γ_w , που απεικονίζει την $W(s)$, περικλείει την αρχή των αξόνων $N = Z - P$ φορές. Αν $N > 0$, τότε ο Γ_w έχει την ίδια φορά με τον Γ_s , ενώ αν $N < 0$, τότε ο Γ_w έχει αντίθετη φορά με τον Γ_s .

Δρόμος Nyquist

Για την περίπτωση μελέτης της ευστάθειας, θεωρούμε ένα κλειστό δρόμο που γράφεται με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού και που περικλείει ολόκληρο το δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο. Ο δρόμος αυτός λέγεται **δρόμος Nyquist** και συμβολίζεται με Γ_N . Η γραφική του παράσταση δίνεται στο Σχ. 5.7.



Σχ. 5.7. Δρόμος Nyquist

Επειδή η συνάρτηση $W(s)$ θα πρέπει να είναι αναλυτική κατά μήκος του Γ_N , χρησιμοποιούνται μικρά ημικύκλια ακτίνας $\rho \rightarrow 0$, τα οποία παρακάμπτουν εκείνα τα σημεία του άξονα των φανταστικών αριθμών που είναι πόλοι της $W(s)$. Έτσι δηλώνεται ότι ο δρόμος Nyquist δεν περνάει από τους πόλους της $W(s)$ και συνεπώς αυτή ορίζεται κατά μήκος του Γ_N .

Ο αντίστοιχος δρόμος που απεικονίζει την $W(s)$, όπου $s \in \Gamma_N$, λέγεται **διάγραμμα Nyquist** και συμβολίζεται με Γ_w .

Όπως ήδη αναφέρθηκε, τα μηδενικά $-z_i$, $i=1,2,\dots,m$, της $W(s)$ είναι οι πόλοι του κλειστού συστήματος. Για να είναι αυτό ευσταθές, θα πρέπει κανένα από τα $-z_i$ να μη βρίσκεται στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο. Με άλλα λόγια, ο δρόμος Nyquist δεν θα πρέπει να περικλείει κανένα από τα $-z_i$, δηλαδή θα πρέπει $Z=0$. Έτσι, το Θεώρημα 5.4 για την περίπτωση της ευστάθειας του κλειστού συστήματος διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 5.5

Έστω το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς (5.9), όπου η $W(s)=1+G(s)F(s)$ είναι ρητή, αναλυτική συνάρτηση που έχει P πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο. Τότε, για να είναι το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist της $W(s)$ να περικλείει την αρχή των αξόνων $N=Z-P=0-P=-P$ φορές.

Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist της $W(s)$ να περικλείει το σημείο $(0,0)$ P φορές, αλλά κατά αντίθετη φορά από αυτή του δρόμου Nyquist.

Επειδή είναι σχετικά πιο απλό να χαράξουμε το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$ από αυτό της $1+G(s)F(s)$, ορίζουμε μια νέα συνάρτηση

$$W^*(s) = W(s) - 1 = G(s)F(s) \quad (5.11)$$

Το διάγραμμα Nyquist της $W^*(s)$ διαφέρει από αυτό της $W(s)$ μόνο ως προς το ότι είναι μετατοπισμένο προς τα αριστερά κατά μία μονάδα. Με την τροποποίηση αυτή το Θεώρημα 5.5 διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 5.6 (Γενικό Θεώρημα Nyquist)

Έστω το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς (5.9), όπου η $W^*(s) = G(s)F(s)$ είναι ρητή, αναλυτική συνάρτηση που έχει P πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο. Τότε, για να είναι το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$ να περικλείει το σημείο $(-1, j0)$, $-P$ φορές.

Το σημείο $(-1, j0)$ λέγεται **κρίσιμο σημείο**.

Ορισμός 5.4

Μία συνάρτηση $W(s)$ λέγεται **ελάχιστης φάσης**, αν δεν έχει πόλους ή μηδενικά στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο. Σε αντίθετη περίπτωση λέγεται **μη-ελάχιστης φάσης**.

Θεώρημα 5.7

Έστω το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς (5.9), όπου η $W^*(s) = G(s)F(s)$ είναι ρητή, αναλυτική συνάρτηση ελάχιστης φάσης. Τότε, για να είναι το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$ να μην περικλείει το κρίσιμο σημείο $(-1, j0)$.

Τα παραπάνω Θεωρήματα 5.6 και 5.7 αποτελούν τη διατύπωση του **κριτηρίου Nyquist**.

Εφαρμογή του κριτηρίου Nyquist

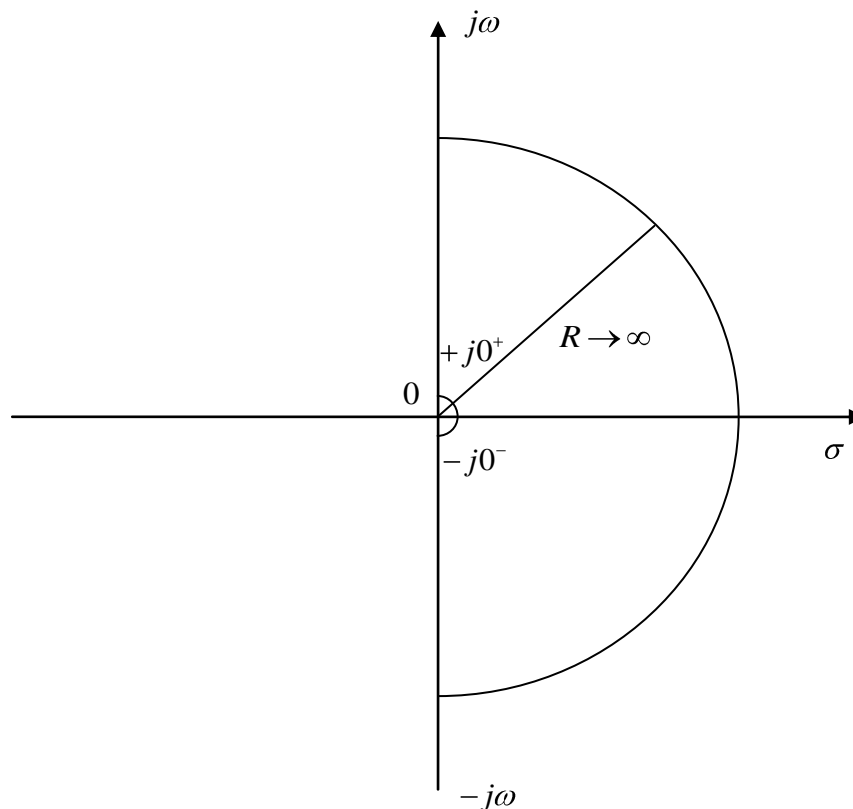
Στην παράγραφο αυτή το κριτήριο Nyquist θα εφαρμοστεί με τη μορφή παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 5.7

Έστω το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad (5.12)$$

Όπου K και a είναι θετικές σταθερές. Είναι φανερό ότι η $G(s)F(s)$ δεν έχει πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο, δηλαδή είναι $P=0$. Προκειμένου να μελετηθεί η ευστάθεια του κλειστού συστήματος, χρειάζεται να σχεδιαστεί το διάγραμμα Nyquist και να εξεταστεί αν αυτό περικλείει το κρίσιμο σημείο $(-1, j0)$ του μιγαδικού επιπέδου. Ο δρόμος Nyquist για τη συνάρτηση (5.12) δίνεται στο Σχ. 5.8.



Σχήμα 5.8. Δρόμος Nyquist για το σύστημα (5.12)

Επειδή η $G(s)F(s)$ έχει ένα πόλο στην αρχή των αξόνων (για $s=0$), ο δρόμος Nyquist παρακάμπτει το σημείο αυτό με ένα μικρό ημικύκλιο ακτίνας $\rho \rightarrow 0$. Επίσης, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.8, ο δρόμος Nyquist χωρίζεται σε τέσσερα τμήματα. Για κάθε ένα από αυτά θα σχεδιαστεί το αντίστοιχο τμήμα του διαγράμματος Nyquist.

- Τμήμα (1): $s \in (j\infty, j0^+)$

Επειδή στο διάστημα αυτό η μιγαδική συχνότητα s παίρνει μόνο φανταστικές τιμές, αντικαθιστούμε $s = j\omega$. Η (5.12) γίνεται

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + a)} \quad (5.13)$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή της (5.13) επί την συζυγή παράσταση του παρονομαστή, προκύπτει

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{K(-\omega^2 - ja\omega)}{\omega^4 + a^2\omega^2} \quad (5.14)$$

Το σημείο, στο οποίο το διάγραμμα Nyquist τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών, προκύπτει εξισώνοντας με μηδέν το φανταστικό μέρος της $G(j\omega)F(j\omega)$. Δηλαδή,

$$\text{Im}[G(j\omega)F(j\omega)] = \frac{-Ka\omega}{\omega^4 + a^2\omega^2} = \frac{-Ka}{\omega(\omega^2 + a^2)} = 0 \quad (5.15)$$

Η (5.15) ικανοποιείται για $\omega \rightarrow \infty$. Επειδή

$$G(j\infty)F(j\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{-K\omega^2}{\omega^4 + a^2\omega^2} = 0, \quad (5.16)$$

έπεται ότι το σημείο τομής με τον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι η αρχή των αξόνων. Για $\omega \rightarrow 0$, η (5.14) δίνει

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)F(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K(-\omega - ja)}{\omega^3 + a^2\omega} = \infty \quad (5.17)$$

Τμήμα (2): $s \in (j0^+, j0^-)$

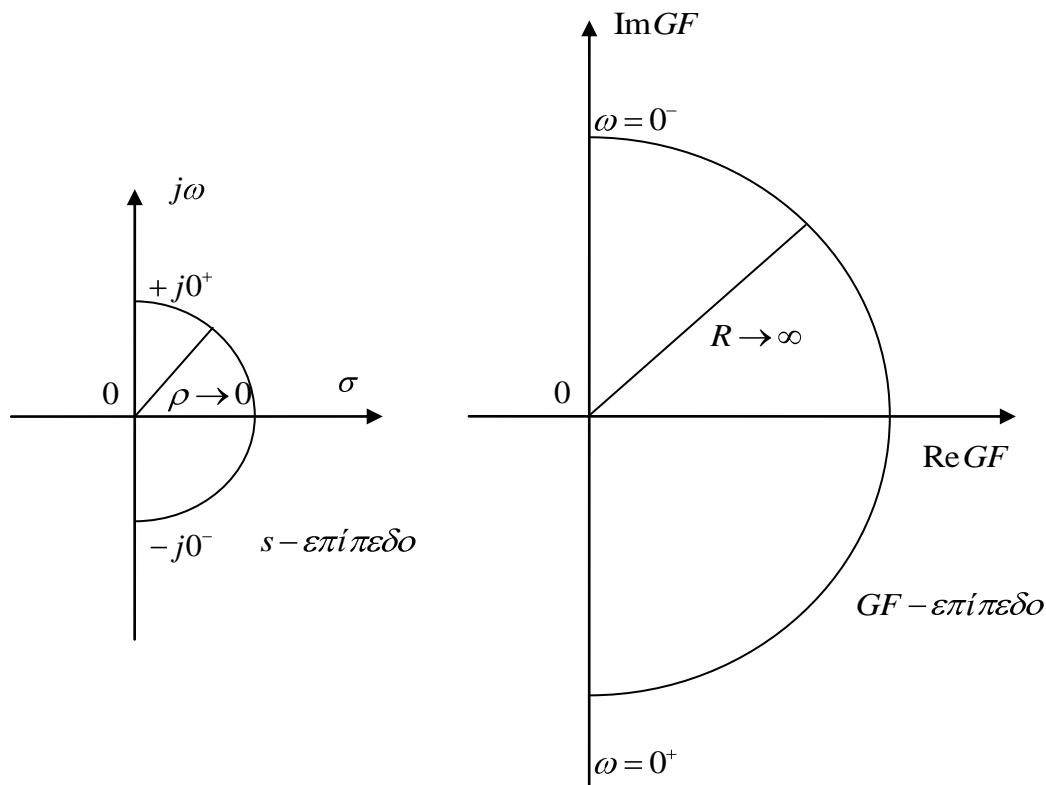
Στο τμήμα αυτό, καθώς ο δρόμος Nyquist διαγράφει το μικρό ημι-κύκλιο κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, η μιγαδική συχνότητα s γράφεται με τη μορφή πολικών συντεταγμένων $s = \rho e^{j\theta}$, όπου $\rho \rightarrow 0$ και $\theta \in (90^\circ, -90^\circ)$. Το αντίστοιχο διάγραμμα Nyquist προκύπτει αντικαθιστώντας την s στην εξίσωση (5.12), δηλαδή

$$G(\rho e^{j\theta})F(\rho e^{j\theta}) = \frac{K}{\rho e^{j\theta}(\rho e^{j\theta} + a)} \quad (5.18)$$

Επειδή $\rho \rightarrow 0$ και επομένως ο όρος $\rho e^{j\theta}$ είναι πολύ μικρός σε σχέση με το a , η (5.18) γίνεται

$$G(\rho e^{j\theta})F(\rho e^{j\theta}) \simeq \frac{K}{a\rho e^{j\theta}} = \infty e^{-j\theta} \quad (5.19)$$

Αυτό σημαίνει ότι το διάγραμμα Nyquist του Τμήματος (2) είναι ένα ημικύκλιο ακτίνας $R \rightarrow \infty$ που διαγράφεται κατ' αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού, αφού είναι $-\theta \in (-90^\circ, 90^\circ)$. Για το Τμήμα (2) έχουμε το Σχ. 5.9.



Σχήμα 5.9. Δρόμος και διάγραμμα Nyquist Τμήματος (2)

Τμήμα (3): $s \in (j0^-, -j\infty)$

Στο τμήμα αυτό είναι και πάλι $s = j\omega$. Λόγω της συμμετρίας του διαγράμματος Nyquist, ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών, το Τμήμα (3) θα είναι συμμετρικό του Τμήματος (1).

Τμήμα (4): $s \in (-j\infty, j\infty)$

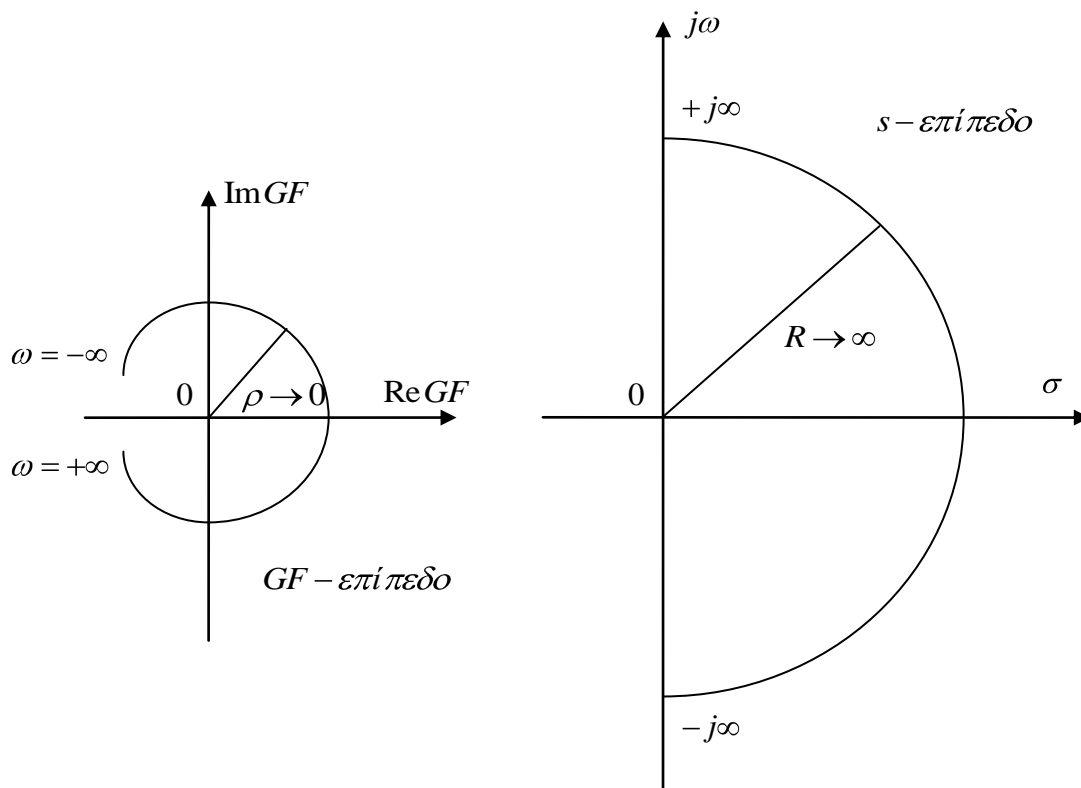
Στο τμήμα αυτό θα είναι $s = Re^{j\theta}$, όπου $R \rightarrow \infty$ και $\theta \in (-90^\circ, 90^\circ)$. Εδώ χρησιμοποιούμε την ίδια τεχνική που χρησιμοποιήσαμε και για το Τμήμα (2). Η (5.12) γίνεται

$$G(Re^{j\theta})F(Re^{j\theta}) = \frac{K}{Re^{j\theta}(Re^{j\theta} + a)} \quad (5.20)$$

Επειδή ο όρος $Re^{j\theta}$ είναι πολύ μεγάλος σε σχέση με το a , θα έχουμε

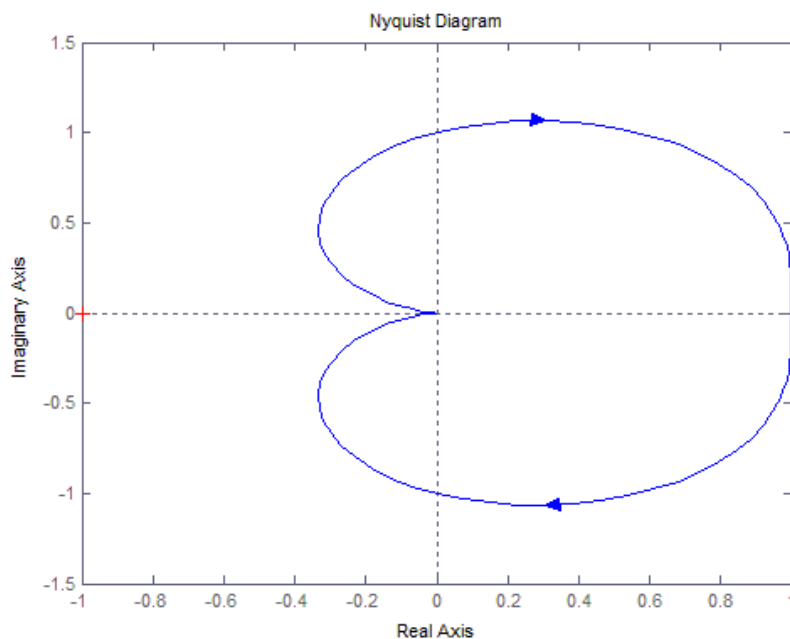
$$G(Re^{j\theta})F(Re^{j\theta}) \approx \frac{K}{R^2 e^{j2\theta}} = 0e^{-j2\theta} \quad (5.21)$$

Αυτό σημαίνει ότι το διάγραμμα Nyquist του Τμήματος (4) είναι ένας μικρός κύκλος ακτίνας $\rho \rightarrow 0$ που διαγράφεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού από 180° μέχρι -180° , όπως φαίνεται στο Σχ. 5.10.



Σχήμα 5.10. Δρόμος και διάγραμμα Nyquist Τμήματος (4)

Το πλήρες διάγραμμα Nyquist της (5.12) παριστάνεται στο Σχ. 5.11. Όπως είναι φανερό, το διάγραμμα Nyquist δεν περικλείει το κρίσιμο σημείο $(-1, j0)$ και επομένως το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές. Αυτό εξάλλου ήταν αναμενόμενο, εφόσον το σύστημα είναι δεύτερης τάξης με χαρακτηριστική εξίσωση $s^2 + as + K = 0$. Για θετικά a και K , οι ρίζες αυτής της εξίσωσης βρίσκονται πάντοτε στο αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο. Το Σχ. 5.11 μας δείχνει, επίσης, ότι προκειμένου να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος, αρκεί να σχεδιαστεί μόνο το διάγραμμα του Τμήματος (1). Από αυτό γίνεται φανερό ότι το κρίσιμο σημείο $(-1, j0)$ δεν περικλείεται ποτέ από το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$, για θετικές τιμές του K .



Σχήμα 5.11. Πλήρες διάγραμμα Nyquist για το σύστημα (5.12)

Παράδειγμα 5.8

Θεωρούμε το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+1)} \quad (5.22)$$

Όπως και στην περίπτωση του Παραδείγματος 5.7, ο δρόμος Nyquist θα παρακάμπτει το σημείο (0,0) με ένα μικρό ημικύκλιο, σαν αυτό του Σχ. 5.8.

-Για το Τμήμα (1) έχουμε $s = j\omega$ και συνεπώς

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{K(j\omega-1)}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{K(j\omega-1)(-\omega^2-j\omega)}{\omega^4+\omega^2} = K \frac{2\omega + j(1-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)} \quad (5.23)$$

Θέτοντας το φανταστικό μέρος ίσο με μηδέν προκύπτει $\omega = \pm 1 \text{ rad/sec}$. Για τις συχνότητες αυτές ($\omega = 1 \text{ rad/sec}$ και $\omega = -1 \text{ rad/sec}$ για τα Τμήματα (1) και (3), αντίστοιχα), το διάγραμμα Nyquist τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Το σημείο τομής προκύπτει από την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης, δηλαδή, $G(j(\pm 1))F(j(\pm 1)) = K$. Επομένως το διάγραμμα Nyquist τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών στο σημείο $(K, j0)$.

-Για το Τμήμα (2) έχουμε $s = \rho e^{j\theta}$, $\theta \in (90^\circ, -90^\circ)$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G(\rho e^{j\theta})F(\rho e^{j\theta}) = \frac{-K}{0e^{j\theta}} = \infty e^{-j(\theta+\pi)} \quad (5.24)$$

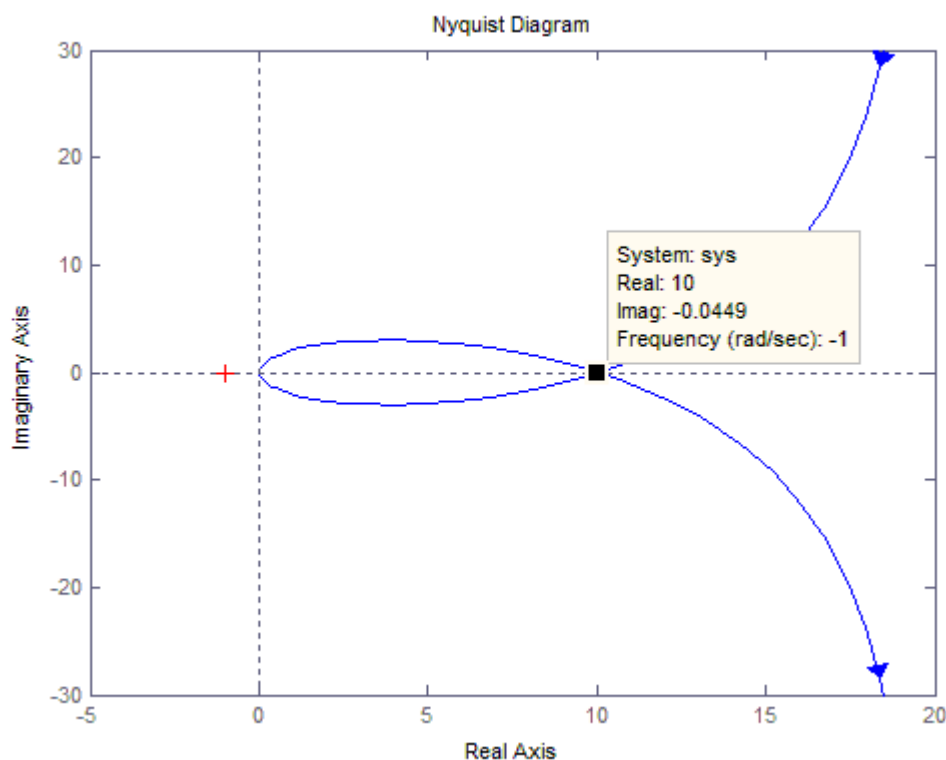
Όπου η γωνία $-\pi$ εισάγεται λόγω του $-K$ στον αριθμητή. Αυτό σημαίνει ότι το διάγραμμα Nyquist του τμήματος (2) είναι περιφέρεια που διαγράφεται με άπειρη ακτίνα από -270° μέχρι 270° (δηλαδή, από 90° μέχρι -90° , αφού συμπληρώσει μία πλήρη περιφορά γύρω από την αρχή των αξόνων). Ας σημειωθεί ότι για να βρεθεί ο αριθμός των περιφορών ισχύει: $270^\circ - (-270^\circ) = 540^\circ = 360^\circ + 180^\circ$.

-Το Τμήμα (3) είναι το συμμετρικό του Τμήματος (1).

-Για το Τμήμα (4) έχουμε $s = Re^{j\theta}$, $\theta \in (-90^\circ, 90^\circ)$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G(Re^{j\theta})F(Re^{j\theta}) = \frac{K}{Re^{j\theta}} = 0e^{-j\theta}$$

Το διάγραμμα του τμήματος αυτού είναι ημικύκλιο ακτίνας $\rho \rightarrow 0$ που διαγράφεται από 90° έως -90° .



Σχήμα 5.12. Διάγραμμα Nyquist για το σύστημα (5.22) για $K=10$

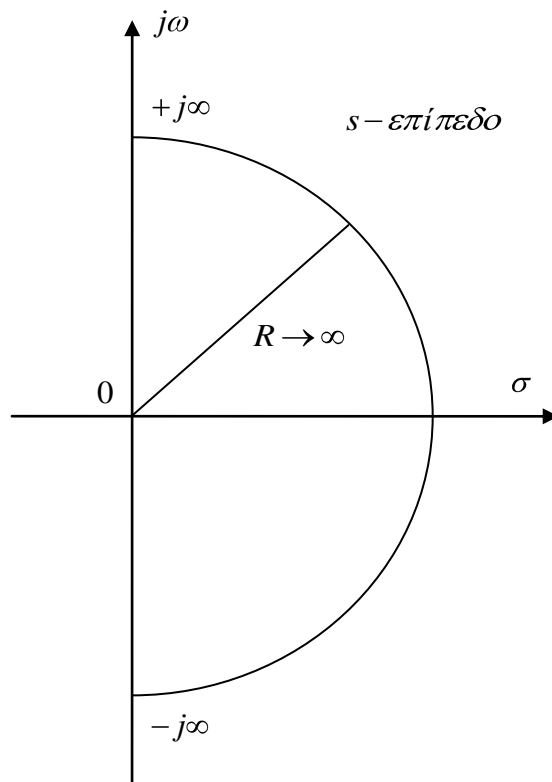
Οι κλάδοι που τείνουν στο άπειρο περικλείουν το κρίσιμο σημείο με τη μορφή κύκλου άπειρης ακτίνας. Συνεπώς, για οποιαδήποτε τιμή του K το σύστημα είναι ασταθές.

Παράδειγμα 5.9

Θεωρούμε το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{10K(s+2)}{s^3 + 3s^2 + 10} \quad (5.25)$$

Επειδή η συνάρτηση αυτή δεν έχει πόλο επάνω στον άξονα των φανταστικών αριθμών, ο δρόμος Nyquist θα είναι ολόκληρο το δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο.



Σχήμα 5.13. Δρόμος Nyquist της (5.25)

Ο δρόμος Nyquist αποτελείται από τρία τμήματα, το (1), το (3) και το (4).

-Για το Τμήμα (1) έχουμε $s = j\omega$ και συνεπώς

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{10K(j\omega + 2)}{(10 - 3\omega^2) - j\omega^3} = \frac{10K[2(10 - 3\omega^2) - \omega^4 + j\omega(10 - 3\omega^2) + j2\omega^3]}{(10 - 3\omega^2)^2 + \omega^6} \quad (5.23)$$

Θέτοντας το φανταστικό μέρος ίσο με μηδέν προκύπτει $\omega = 0 \text{ rad/sec}$ και $\omega = \pm\sqrt{10} \text{ rad/sec}$. Για τις συχνότητες αυτές το διάγραμμα Nyquist τέμνει τον άξονα

των πραγματικών αριθμών. Τα σημεία τομής προκύπτουν από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης, δηλαδή, $G(j0)F(j0) = 2K$ και $G(j(\pm\sqrt{10}))F(j(\pm\sqrt{10})) = -K$.

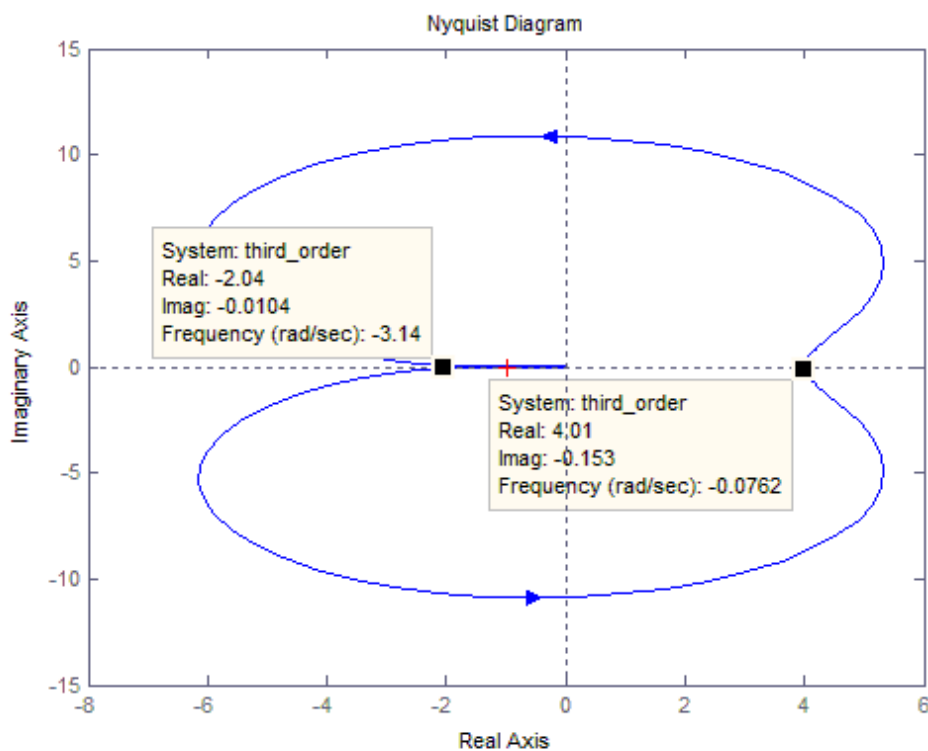
-Το Τμήμα (3) είναι το συμμετρικό του Τμήματος (1).

-Για το Τμήμα (4) έχουμε $s = Re^{j\theta}$, $\theta \in (-90^\circ, 90^\circ)$

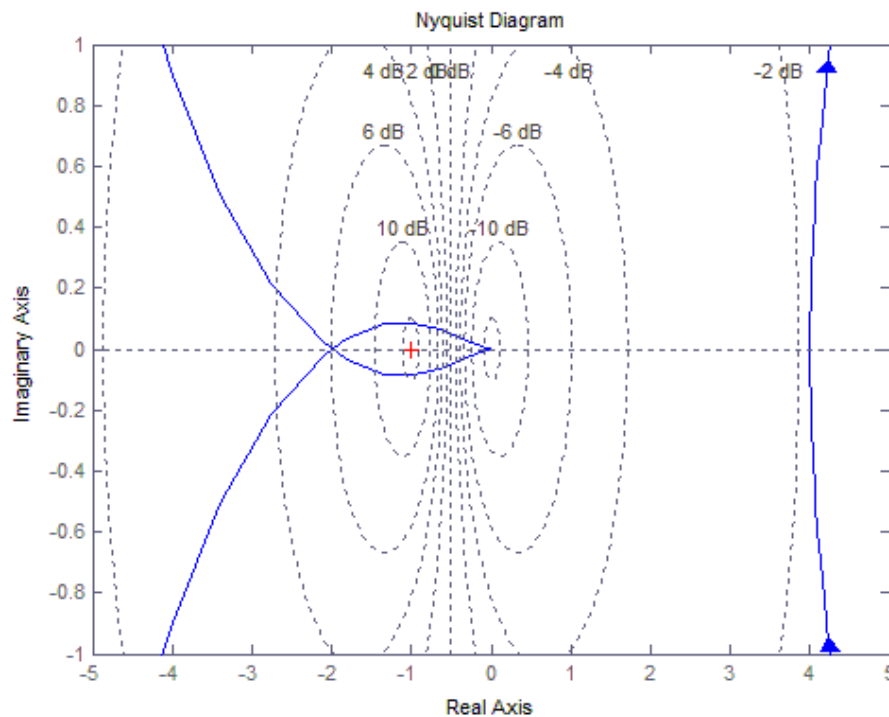
$$\lim_{R \rightarrow \infty} G(Re^{j\theta})F(Re^{j\theta}) = \frac{10K}{R^2 e^{j2\theta}} = 0e^{-j2\theta}$$

Αυτό σημαίνει ότι το διάγραμμα Nyquist του Τμήματος (4) είναι κύκλος μηδενικής ακτίνας που διαγράφεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού από 180° μέχρι -180° .

Το σημείο τομής με τον άξονα των φανταστικών αριθμών προκύπτει μηδενίζοντας το πραγματικό μέρος της συνάρτησης. Αυτό γίνεται για $\omega = \pm 1.54 \text{ rad/sec}$, οπότε $G(\pm j1.54)F(\pm j1.54) = j10\sqrt{2}K/3$.



Σχήμα 5.14. Διάγραμμα Nyquist για το σύστημα 5.25. για $K=2$



Σχήμα 5.14α. Διάγραμμα Nyquist για το σύστημα 5.25. για $K=2$: λεπτομέρεια στην περιοχή του σημείου τομής με τον άξονα των πραγματικών αριθμών

Επίδραση της προσθήκης πόλων και μηδενικών της $G(s)F(s)$ στο διάγραμμα Nyquist

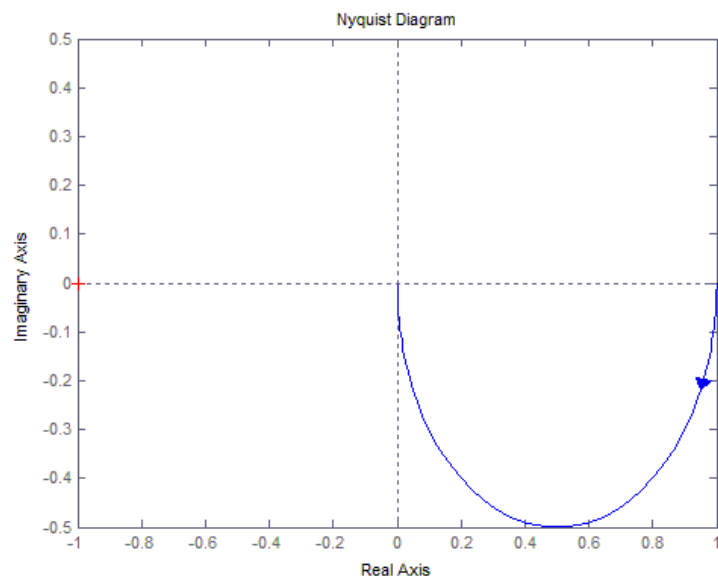
Είναι γνωστό ότι, προσθέτοντας πόλους ή μηδενικά στη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος, επηρεάζεται η χρονική συμπεριφορά του, αλλά και η ευστάθειά του.

Ας θεωρήσουμε το σύστημα πρώτης τάξης

$$G(s)F(s) = \frac{K}{1 + sT_1} \quad (5.26)$$

Το διάγραμμα Nyquist για $\omega \in (+\infty, 0)$ δίνεται στο Σχ. 5.15

Αν θεωρούσαμε $\omega \in (+\infty, -\infty)$, τότε το πλήρες διάγραμμα Nyquist θα περιελάμβανε και το συμμετρικό του, δηλαδή θα ήταν κύκλος.

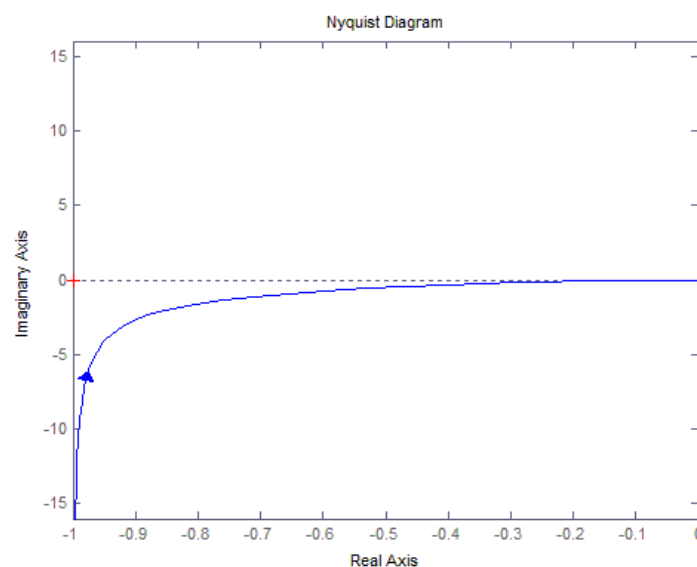


Σχήμα 5.15. Διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s) = K/(1 + sT_1)$

Έστω τώρα ότι προσθέτουμε ένα πόλο στο σημείο $s = 0$. Η νέα συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι

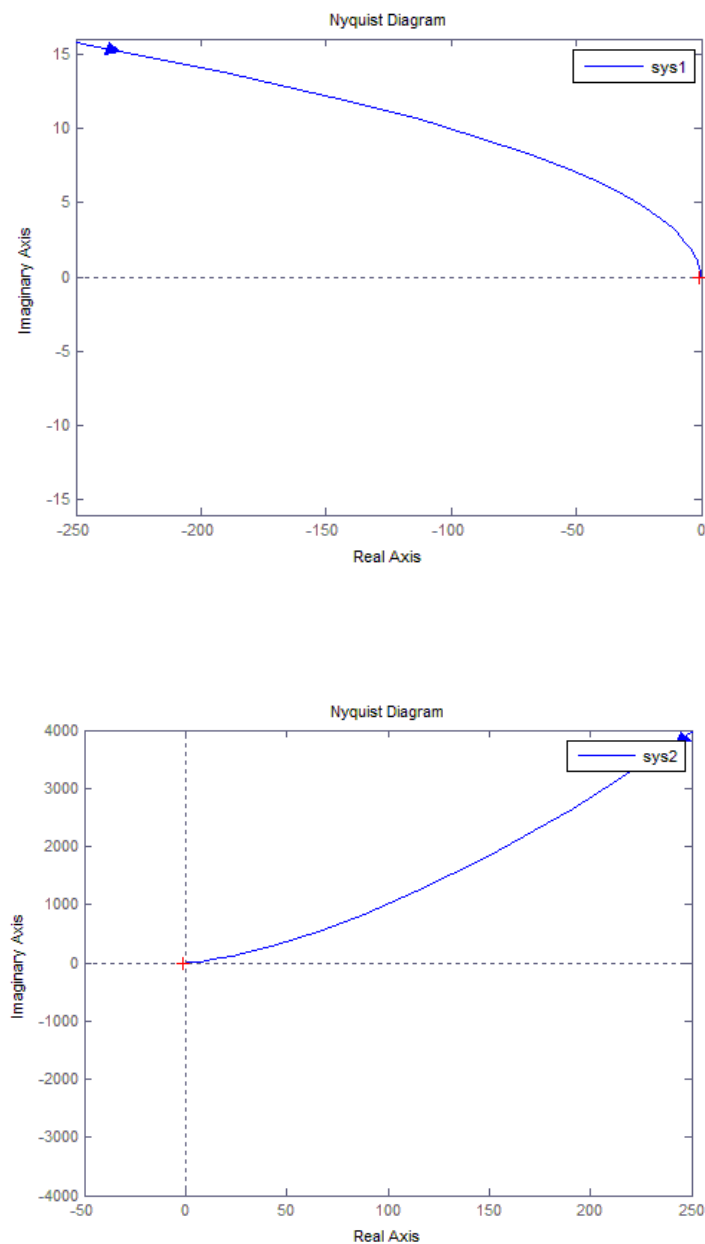
$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(1 + sT_1)} \quad (5.27)$$

και έχει διάγραμμα Nyquist



Σχήμα 5.16. Διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s) = K/s(1 + sT_1)$

Όπως φαίνεται από το Σχ. 5.16, η προσθήκη ενός πόλου στο $s=0$ συνεπάγεται τη μετατόπιση του διαγράμματος κατά -90° . Συνεχίζοντας την προσθήκη πόλων για $\omega \in (+\infty, 0)$, λαμβάνονται τα ακόλουθα σχήματα:



Σχήμα 5.17. Διαγράμματα Nyquist (sys1) της $G(s)F(s) = K/s^2(1+sT_1)$ και (sys2) της $G(s)F(s) = K/s^3(1+sT_1)$

Παρατηρούμε ότι η προσθήκη περισσότερων του ενός πόλων στο $s=0$ στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος πρώτης τάξης έχει ως αποτέλεσμα το σύστημα να γίνεται ασταθές.

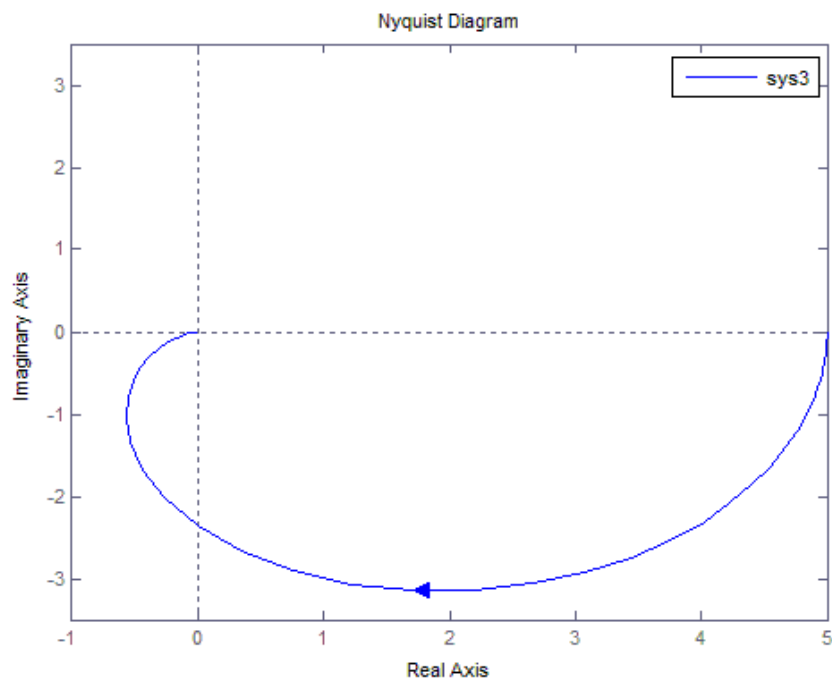
Στη συνέχεια, προσθέτουμε ένα πόλο στο σημείο $s = -1/T_2$, οπότε η αρχική συνάρτηση γίνεται

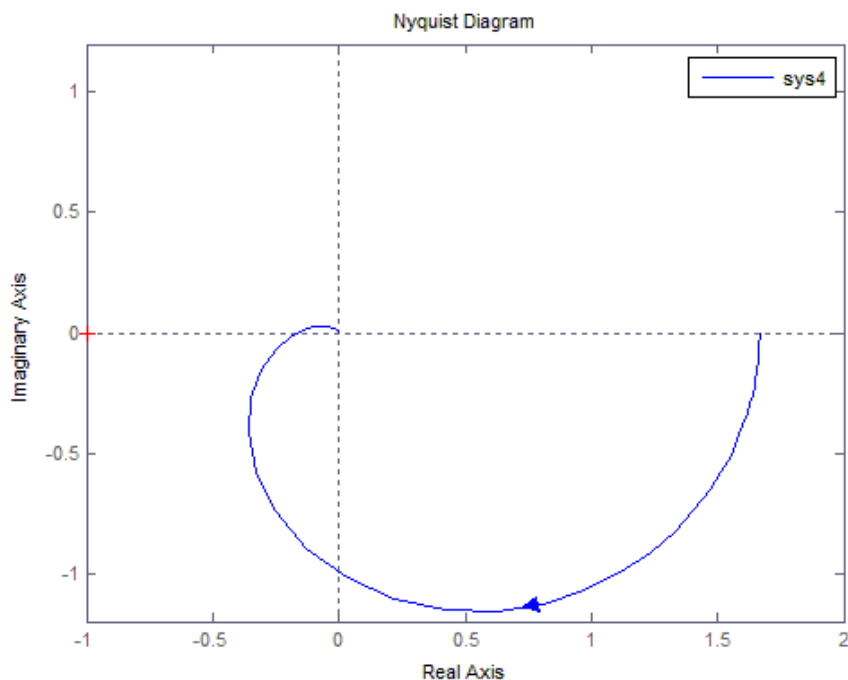
$$G(s)F(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \quad (5.28)$$

Αυτό έχει ως συνέπεια την επέκταση του αρχικού διαγράμματος και στο τρίτο τεταρτημόριο. Αν, επιπλέον, προστεθεί και ένας πόλος στο σημείο $s = -1/T_3$, η συνάρτηση θα γίνει

$$G(s)F(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)} \quad (5.29)$$

και το διάγραμμα Nyquist θα επεκταθεί και στο δεύτερο τεταρτημόριο. Οι δύο αυτές περιπτώσεις απεικονίζονται στο Σχ. 5.18.





Σχήμα 5.18. Διαγράμματα Nyquist (sys3) της $G(s)F(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$ και (sys4) της

$$G(s)F(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$$

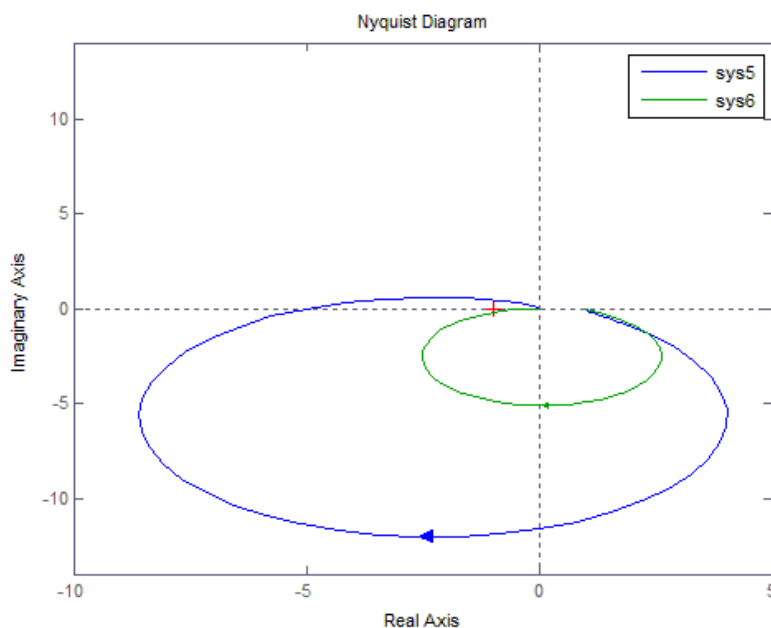
Αντίθετα με τις προηγούμενες περιπτώσεις, η προσθήκη μηδενικών τείνει να καταστήσει το σύστημα περισσότερο ευσταθές. Θεωρούμε το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(1+sT_1)(1+sT_2)} \quad (5.30)$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές για $0 \leq K < (T_1 + T_2)/T_1 T_2$. Έστω τώρα ότι προστίθεται ένα μηδενικό στο σημείο $s = -1/T_d$. Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου θα γίνει

$$G(s)F(s) = \frac{K(1+sT_d)}{s(1+sT_1)(1+sT_2)} \quad (5.31)$$

Το διάγραμμα Nyquist στις δύο αυτές περιπτώσεις είναι



Σχήμα 5.19. Διαγράμματα Nyquist (sys5) της $G(s)F(s) = K/s(1+sT_1)(1+sT_2)$ και (sys6) της $G(s)F(s) = K(1+sT_d)/s(1+sT_1)(1+sT_2)$

Η προσθήκη ενός μηδενικού συνεπάγεται τη μετατόπιση προς τα δεξιά του σημείου τομής του διαγράμματος Nyquist με τον πραγματικό άξονα. Το νέο σημείο τομής είναι πιο κοντά στην αρχή των αξόνων.

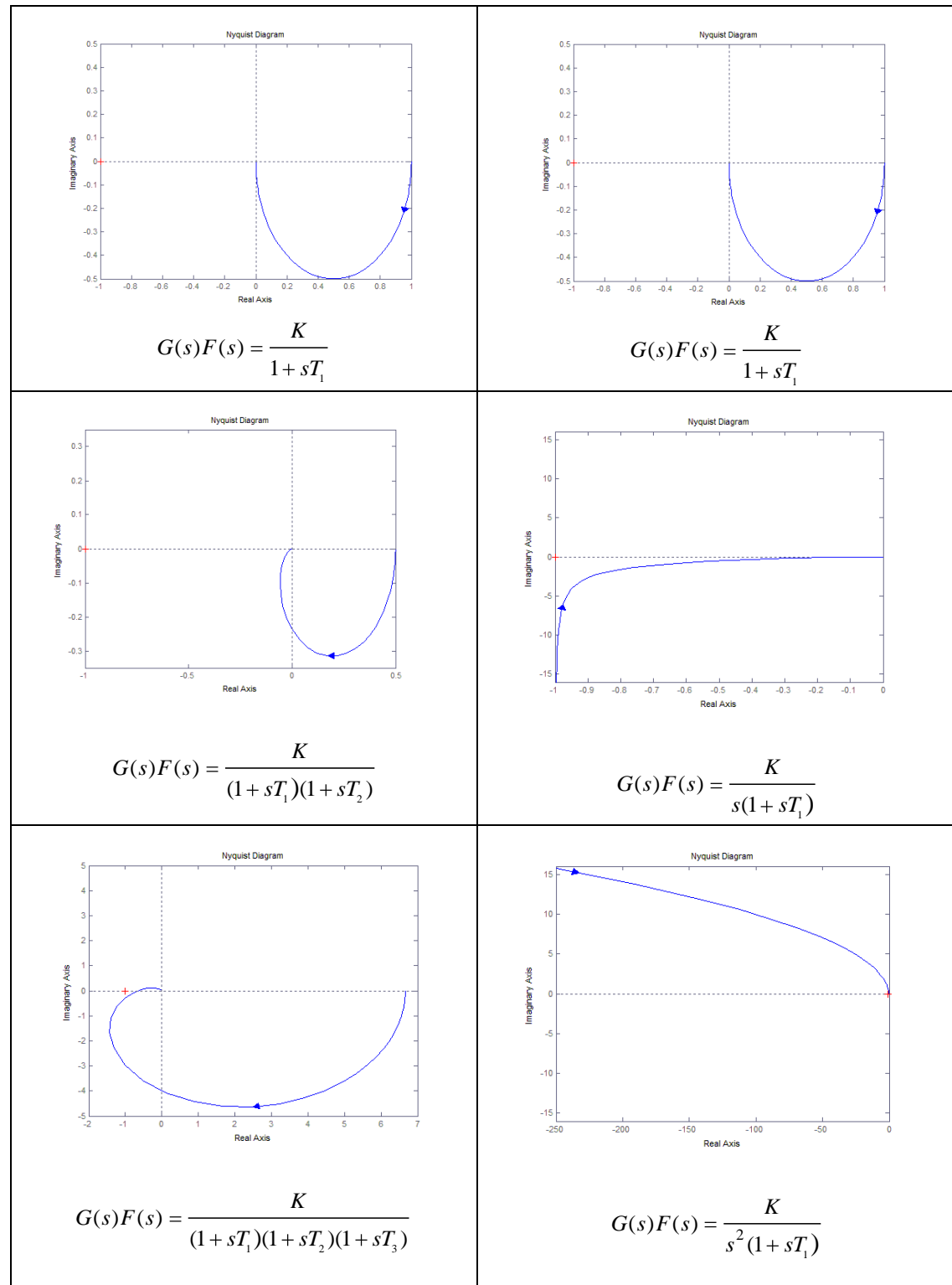
Ας σημειωθεί ότι από φυσική άποψη η προσθήκη πόλων ή / και μηδενικών στη συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού συστήματος σημαίνει ότι εισάγεται στο βρόχο ανάδρασης ένας δυναμικός αντισταθμιστής. Στην πρώτη περίπτωση πρόκειται για ολοκληρωτικό αντισταθμιστή και στη δεύτερη για διαφορικό αντισταθμιστή.

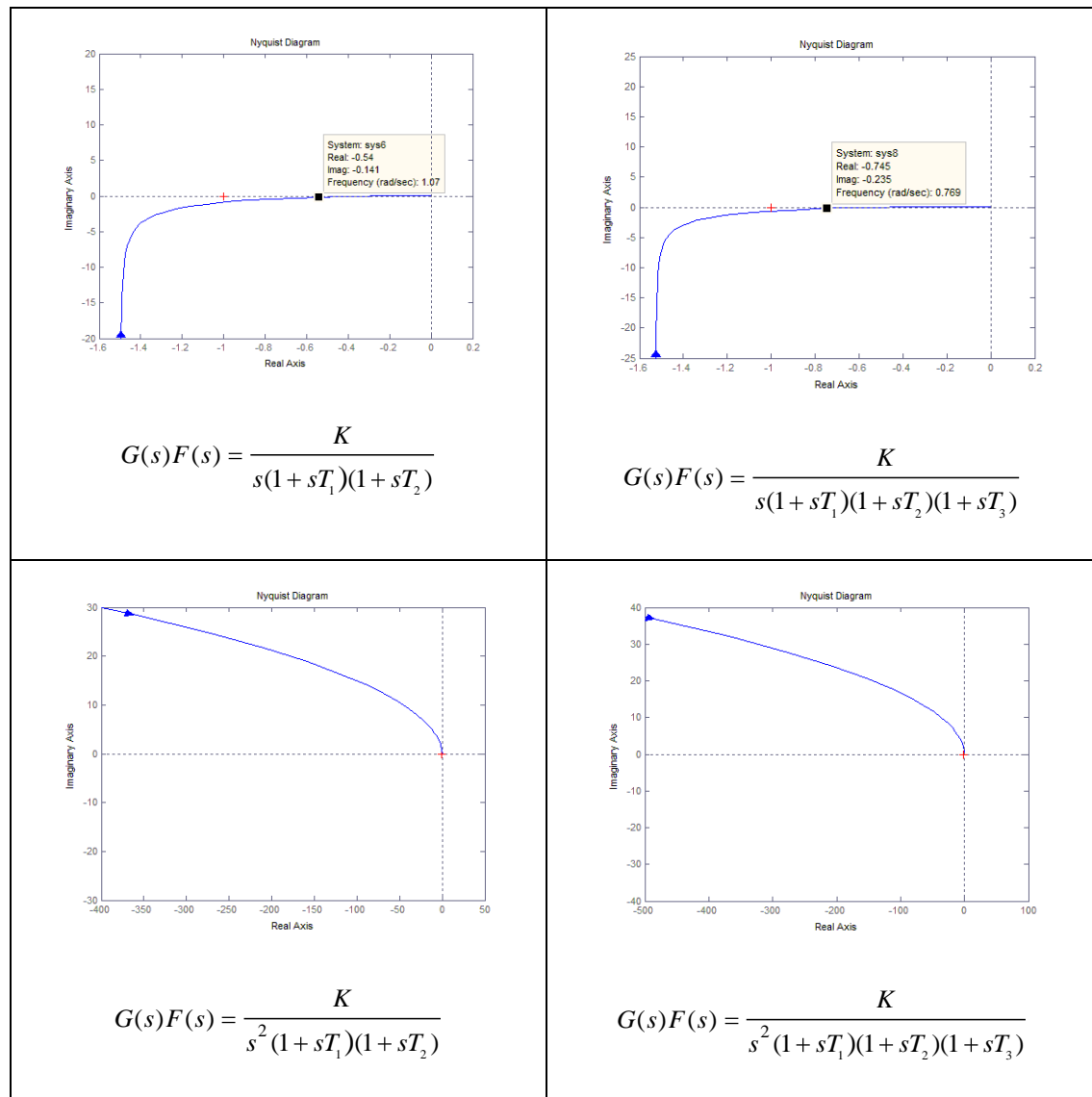
Το διάγραμμα Nyquist, όπως παρουσιάστηκε μέχρι εδώ, αφορά συστήματα μιας εισόδου – μιας εξόδου. Για τα συστήματα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια τεχνική που συνίσταται στην αντιμετώπιση του βρόχου ανάδρασης σαν ένα πλήθος επί μέρους βρόχων και στη θεώρηση του κάθε βρόχου ξεχωριστά ως επί μέρους συστήματος μιας εισόδου – μιας εξόδου. Χρησιμοποιείται επίσης μια κατάλληλη επέκταση του κριτηρίου Nyquist στα συστήματα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων.

Επίδραση της σταθεράς ενίσχυσης

Η τιμή της σταθεράς ενίσχυσης K παίζει καθοριστικό ρόλο στην ευστάθεια του κλειστού συστήματος, κυρίως για συστήματα ανώτερης τάξης. Συγκεκριμένα, για συστήματα πρώτης και δεύτερης τάξης το κλειστό σύστημα παραμένει ευσταθές για οποιαδήποτε τιμή του K . Όμως, για συστήματα τρίτης τάξης και μεγαλύτερης, η ευστάθεια εξαρτάται από την τιμή του K . Έτσι, καθώς το K αυξάνει, το κλειστό σύστημα τείνει να γίνει ασταθές. Αυτό φαίνεται και από τις γραφικές παραστάσεις του Πίνακα 5.20.

Πίνακας 5.20. Διαγράμματα Nyquist βασικών συναρτήσεων μεταφοράς βρόχου





Σχετική ευστάθεια: περιθώριο ενίσχυσης και περιθώριο φάσης

Τα περιθώρια ενίσχυσης και φάσης είναι μεγέθη τα οποία ποσοτικοποιούν τη σχετική ευστάθεια των συστημάτων. Είναι, δηλαδή, μεγέθη τα οποία δίνουν ένα μέτρο για το πόσο μακριά από την αστάθεια βρίσκεται ένα σύστημα.

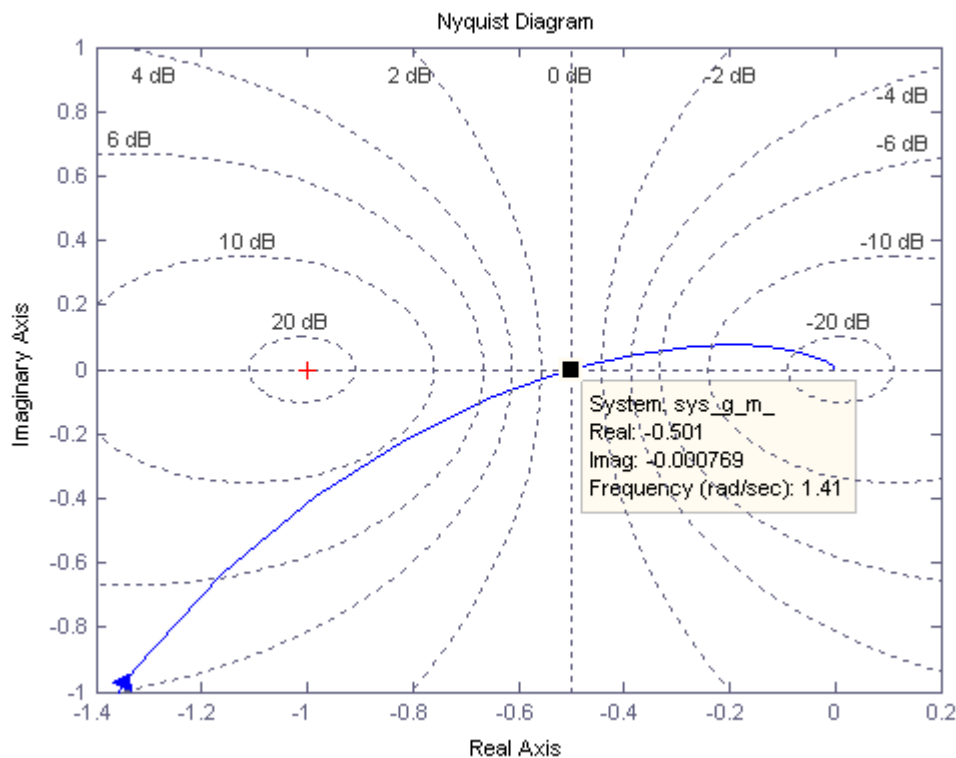
Ορισμός 5.5

Έστω ω_c η **κρίσιμη συχνότητα** κατά την οποία το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$ τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών, δηλαδή, $\text{Im}[G(j\omega_c)F(j\omega_c)] = 0$. Το **περιθώριο ενίσχυσης** του κλειστού συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$K_g = -20 \log_{10} |G(j\omega_c)F(j\omega_c)| \quad (5.32)$$

και μετράται σε db . Η φυσική σημασία του περιθωρίου ενίσχυσης είναι η εξής: Το περιθώριο ενίσχυσης εκφράζει το μέγιστο επιτρεπτό ποσό αύξησης της ενίσχυσης (σε

db) της $G(s)F(s)$, για το οποίο το κλειστό σύστημα παραμένει ευσταθές. Η αύξηση αυτή γίνεται συνήθως μεταβάλλοντας το K .



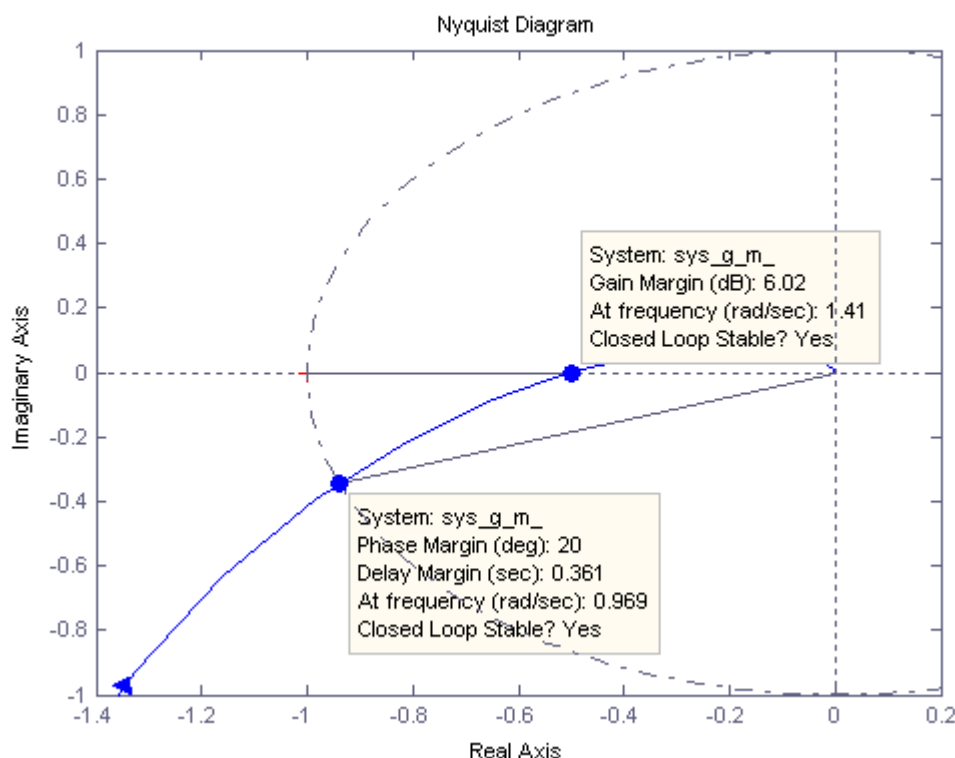
Σχήμα 5.21. Περιθώριο ενίσχυσης

Ορισμός 5.6

Έστω ω' η συχνότητα κατά την οποία το πλάτος του διαγράμματος Nyquist της $G(s)F(s)$ είναι μονάδα, δηλαδή, $|G(j\omega')F(j\omega')|=1$. Έστω φ το όρισμα της $G(j\omega')F(j\omega')$. Το **περιθώριο φάσης** του κλειστού συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$\varphi_p = -180^\circ + \varphi \quad (5.33)$$

Η φυσική σημασία του περιθωρίου φάσης είναι η εξής: Το περιθώριο φάσης εκφράζει τη μέγιστη επιτρεπτή γωνία περιστροφής του διαγράμματος Nyquist της $G(s)F(s)$ γύρω από την αρχή των αξόνων, για την οποία το κλειστό σύστημα παραμένει ευσταθές, δηλαδή, μέχρις ότου το σημείο με $|G(j\omega')F(j\omega')|=1$ να συμπίπτει με το κρίσιμο σημείο $(-1, j0)$. Η περιστροφή γίνεται συνήθως μεταβάλλοντας τις παραμέτρους του συστήματος (χρονικές σταθερές, συντελεστή απόσβεσης).



Σχήμα 5.22. Περιθώριο φάσης

Η ευστάθεια του κλειστού συστήματος κρίνεται, τόσο από το πρόσημο, όσο και από το μέγεθος των περιθωρίων ενίσχυσης και φάσης. Για την απόλυτη ευστάθεια ισχύει ότι ένα κλειστό σύστημα είναι ευσταθές, όταν και τα δύο περιθώρια είναι θετικά. Η σχετική ευστάθεια είναι ικανοποιητική, όσο μεγαλύτερα είναι τα περιθώρια ενίσχυσης και φάσης, δηλαδή, όσο πιο δύσκολα γίνεται ασταθές το κλειστό σύστημα. Τα παραπάνω ισχύουν για συστήματα ελάχιστης φάσης. Σε συστήματα μη ελάχιστης φάσης ένα από τα περιθώρια μπορεί να είναι αρνητικό, παρά το ότι το σύστημα είναι ευσταθές.

Παράδειγμα 5.10

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}, \quad K > 0 \quad (5.34)$$

Να βρεθούν:

Οι τιμές της σταθεράς ενίσχυσης K , για τις οποίες το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές και

Το περιθώριο ενίσχυσης K_g , όταν $K = 2$ και $K = 40$.

Λύση

(1) Επειδή η $G(s)F(s)$ δεν έχει κανένα πόλο στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο, θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$ να μη περικλείει το κρίσιμο σημείο $(-1, j0)$, προκειμένου να είναι το κλειστό σύστημα ευσταθές. Έχουμε,

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+4)} = \frac{K}{-5\omega^2 - j\omega(\omega^2-4)}$$

της οποίας το όρισμα είναι

$$\varphi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega^2-4}{5\omega}$$

Η κρίσιμη συχνότητα ω_c βρίσκεται, όταν μηδενίσουμε το φανταστικό μέρος της $G(j\omega)F(j\omega)$, δηλαδή, όταν $\omega(\omega^2-4)=0$. Η σχέση αυτή ικανοποιείται, όταν $\omega=0 \text{ rad/sec}$ και $\omega=\pm 2 \text{ rad/sec}$. Τα αντίστοιχα ορίσματα είναι $\varphi(0)=-90^\circ$ και $\varphi(\pm 2)=-180^\circ$. Επομένως, το διάγραμμα Nyquist τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών, όταν $\omega=\omega_c=\pm 2 \text{ rad/sec}$. Το σημείο τομής έχει συντεταγμένες $[G(\pm j2)F(\pm j2), j0] = (-\frac{K}{20}, j0)$. Το σημείο αυτό θα πρέπει να βρίσκεται δεξιά του $(-1, j0)$, προκειμένου να είναι το κλειστό σύστημα ευσταθές. Συνεπώς, θα πρέπει να είναι $-1 < -\frac{K}{20} \Rightarrow K < 20$. Άρα, για $K \in (0, 20)$ το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές.

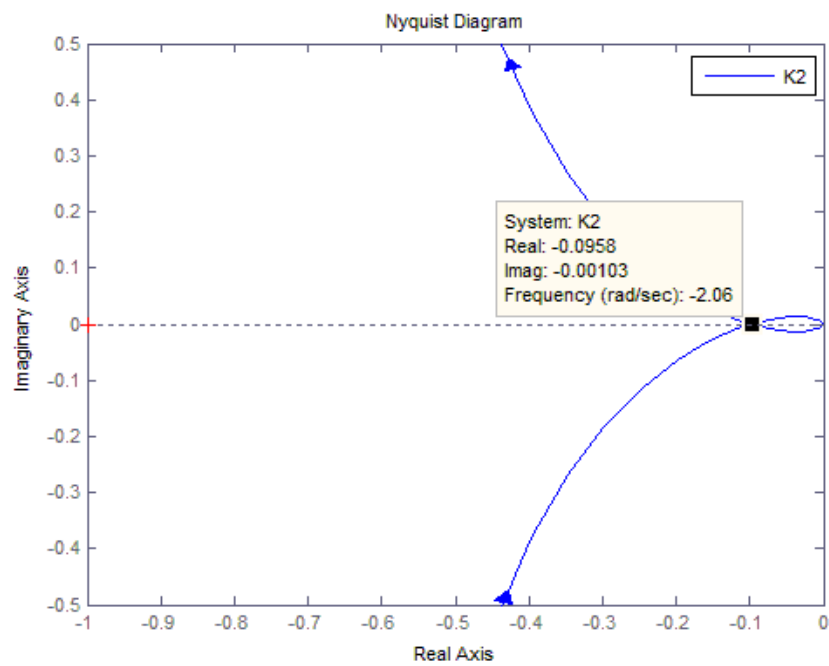
(2) Από τον ορισμό έχουμε:

$$\text{Για } K=2, \quad K_g = -20 \log_{10} \left| -\frac{2}{20} \right| = 20 \text{ db}$$

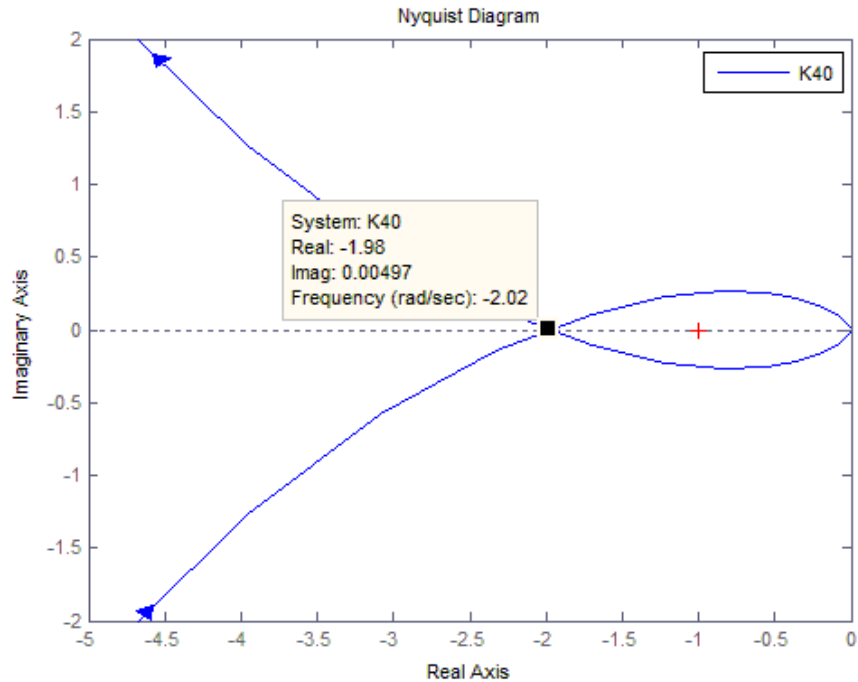
$$\text{Για } K=40, \quad K_g = -20 \log_{10} \left| -\frac{40}{20} \right| = -20 \log_{10} 2 \text{ db} < 0$$

Επομένως, για $K=2$ το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές, ενώ για $K=40$ είναι ασταθές.

Το διάγραμμα Nyquist για διαφορετικές τιμές του K δίνεται στο Σχ. 5.23.



Σχήμα 5.23α. Διάγραμμα Nyquist για $K=2$



Σχήμα 5.23β. Διάγραμμα Nyquist για $K=40$

Παράδειγμα 5.11

Δίνεται το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s-1}, \quad K > 0 \quad (5.35)$$

Να βρεθεί για ποιες τιμές του K είναι το σύστημα ευσταθές.

Λύση

Επειδή η $G(s)F(s)$ έχει ένα πόλο στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο, θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$ να περικλείει το κρίσιμο σημείο $(-1, j0)$, μία φορά, διαγραφόμενο με φορά αντίθετη από αυτή του δρόμου Nyquist, προκειμένου να είναι το κλειστό σύστημα ευσταθές. Έχουμε,

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{K}{j\omega - 1}$$

Η κρίσιμη συχνότητα είναι $\omega_c = 0 \text{ rad/sec}$ και $G(j0)F(j0) = -K$. Άρα θα πρέπει $-K < -1$ ή $K > 1$.

5.5.2 Γεωμετρικός τόπος των ριζών

Εισαγωγή

Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών (γ.τ.ρ.) είναι μια εποπτική μέθοδος μελέτης της ευστάθειας και της σχετικής ευστάθειας ενός συστήματος. Όπως είναι γνωστό, οι πόλοι ενός συστήματος (δηλαδή, οι ρίζες του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς του) καθορίζουν την ευστάθειά του, καθώς επίσης και τη χρονική του απόκριση. Εξάλλου, η σχετική ευστάθεια του συστήματος καθορίζεται και από την τιμή της σταθεράς ενίσχυσης K , η οποία στη γενική περίπτωση παίρνει τιμές που κυμαίνονται από $-\infty$ έως ∞ . Κάθε μεταβολή του K έχει σαν συνέπεια τη μετατόπιση των πόλων πάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Έτσι, ο γεωμετρικός τόπος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης του κλειστού συστήματος, καθώς το K μεταβάλλεται, δίνει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την ευστάθεια και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σχεδιασμό ευσταθών συστημάτων.

Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζεται μια προσεγγιστική μέθοδος κατασκευής της γραφικής παράστασης του γ.τ.ρ., η οποία αναπτύχθηκε από τον W.R. Evans.

Κατασκευή του γεωμετρικού τόπου των ριζών

Η χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$1 + G(s)F(s) = 0 \quad (5.36)$$

η οποία γράφεται και με τη μορφή

$$G(s)F(s) = -1 \quad (5.37)$$

Για τη μιγαδική συνάρτηση $G(s)F(s)$ έχουμε, λόγω της (5.37),

$$|G(s)F(s)| = 1 \text{ και } \angle G(s)F(s) = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.38)$$

Η $G(s)F(s)$ είναι μία ρητή συνάρτηση της μορφής

$$G(s)F(s) = K \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad (5.39)$$

με μέτρο

$$|K| \frac{\prod_{i=1}^m |s+z_i|}{\prod_{i=1}^n |s+p_i|} = 1, \quad -\infty < K < \infty \quad (5.40)$$

και όρισμα

$$\sum_{i=1}^m \angle(s+z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s+p_i) = \begin{cases} (2k+1)\pi, & k > 0 \\ 2k\pi, & k < 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

Ορισμός 5.7

Ο γ.τ.ρ. του κλειστού συστήματος με χαρακτηριστική εξίσωση (5.34) είναι ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων s που ικανοποιούν τις σχέσεις (5.37) – (5.39).

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα σύνολο θεωρημάτων που επιτρέπουν την κατασκευή του γεωμετρικού τόπου των ριζών. Η απόδειξη των θεωρημάτων δεν παρουσιάζεται εδώ, είναι όμως διαθέσιμη στην ελληνική και ξένη βιβλιογραφία.

Θεώρημα 5.8

Τα σημεία του γεωμετρικού τόπου των ριζών για $K = 0$ είναι οι πόλοι της $G(s)F(s)$. Τα σημεία αυτά είναι τα **σημεία εκκίνησης** του γ.τ.ρ.

Θεώρημα 5.9

Τα σημεία του γεωμετρικού τόπου των ριζών για $K = \pm\infty$ είναι τα μηδενικά της $G(s)F(s)$. Τα σημεία αυτά καθώς και το $s \rightarrow \pm\infty$ είναι τα **σημεία άφιξης** του γ.τ.ρ.

Θεώρημα 5.10

Ο αριθμός των **διακεκριμένων τόπων** (κλάδων) του γεωμετρικού τόπου των ριζών ισούται με $\max(m, n)$, όπου m και n είναι ο αριθμός των μηδενικών και ο αριθμός των πόλων της $G(s)F(s)$, αντίστοιχα.

Θεώρημα 5.11

Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών, για $K \in (-\infty, \infty)$, είναι **συμμετρικός** ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Θεώρημα 5.12

Για μεγάλες τιμές του s , ο γεωμετρικός τόπος των ριζών πλησιάζει ασυμπτωτικά σε ευθείες γραμμές (ασύμπτωτες). Οι **γωνίες των ασυμπτώτων** με τον άξονα των πραγματικών αριθμών δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \vartheta_k &= \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k=0,1,\dots,|n-m|-1, \quad K > 0 \\ \vartheta_k &= \frac{2k\pi}{n-m}, \quad k=0,1,\dots,|n-m|-1, \quad K < 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

Θεώρημα 5.13

Όλες οι ασύμπτωτες του γεωμετρικού τόπου των ριζών τέμνονται σε ένα σημείο του άξονα των πραγματικών αριθμών. Το **σημείο τομής των ασυμπτώτων** είναι το σημείο σ , όπου

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n (-p_i) - \sum_{i=1}^m (-z_i)}{n-m} \quad (5.43)$$

Υπενθυμίζεται ότι $-p_i$ είναι οι πόλοι και $-z_i$ είναι τα μηδενικά της $G(s)F(s)$, αντίστοιχα.

Θεώρημα 5.14

Ένα **τμήμα του άξονα των πραγματικών αριθμών** είναι και τμήμα του γ.τ.ρ., αν ισχύουν τα ακόλουθα:

Για $K > 0$: Ο αριθμός των πραγματικών πόλων και μηδενικών της $G(s)F(s)$, που βρίσκονται δεξιά του τμήματος, είναι **περιττός**.

Για $K < 0$: Ο αριθμός των πραγματικών πόλων και μηδενικών της $G(s)F(s)$, που βρίσκονται δεξιά του τμήματος, είναι **άρτιος**.

Θεώρημα 5.15

Τα **σημεία θλάσης** του γ.τ.ρ. είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\frac{d[G(s)F(s)]}{ds} = 0 \quad (5.44)$$

και επιπλέον ικανοποιούν τη σχέση $1+G(s)F(s)=0$, για κάποια πραγματική τιμή του K .

Θεώρημα 5.16

Οι **γωνίες εκκίνησης από τους μιγαδικούς πόλους** του γεωμετρικού τόπου των ριζών προσδιορίζονται ως εξής:

$$\vartheta_{-p_q} = \angle(s + p_q) = -(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{i=1, i \neq q}^n \angle(s + p_i) \quad (5.45)$$

όπου $-p_q$ είναι ο εν λόγω μιγαδικός πόλος.

Τέλος, τα **σημεία τομής** (αν υπάρχουν) του γ.τ.ρ. με τον άξονα των φανταστικών αριθμών προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας το κριτήριο Routh.

Παράδειγμα 5.12

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad (5.46)$$

Λύση

Τα σημεία εκκίνησης του γ.τ.ρ. είναι οι πόλοι της $G(s)F(s)$, δηλαδή τα σημεία $s=0$, $s=-1$, $s=-2$.

Τα σημεία άφιξης του γ.τ.ρ. είναι για $s \rightarrow \infty$.

Ο αριθμός των διακεκριμένων κλάδων του γ.τ.ρ. είναι: $\max(0, 3) = 3$.

Οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι:

$$\vartheta_k = \frac{(2k+1)\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \quad K > 0$$

$$\vartheta_k = \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \quad K < 0$$

ή

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \vartheta_1 = \pi, \quad \vartheta_2 = \frac{5\pi}{3}, \quad K > 0$$

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \vartheta_2 = \frac{4\pi}{3}, \quad K < 0$$

Το σημείο τομής των ασυμπτώτων είναι

$$\sigma = \frac{0 + (-1) + (-2) - (0)}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Τα τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στον γ.τ.ρ. είναι:

Για $K > 0$: $(-\infty, -2)$ και $(-1, 0)$

Για $K < 0$: $(-2, -1)$ και $(0, +\infty)$

Τα σημεία θλάσης του γ.τ.ρ. προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης:

$$\frac{d[G(s)F(s)]}{ds} = \frac{-K[s(s+1) + s(s+2) + (s+1)(s+2)]}{[s(s+1)(s+2)]^2} = 0 \Rightarrow$$

$$3s^2 + 6s + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 \approx -0.44 \\ s_2 \approx -1.57 \end{cases}$$

Οι τιμές αυτές ικανοποιούν την $1 + G(s)F(s) = 0$ για πραγματικές τιμές του K και μάλιστα η $s_1 = -0.44$ για $K > 0$ και η $s_2 = -1.57$ για $K < 0$.

Επειδή δεν υπάρχουν μιγαδικοί πόλοι δεν υπάρχουν και οι αντίστοιχες γωνίες εκκίνησης.

Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα των φανταστικών αριθμών, εργαζόμαστε ως εξής:

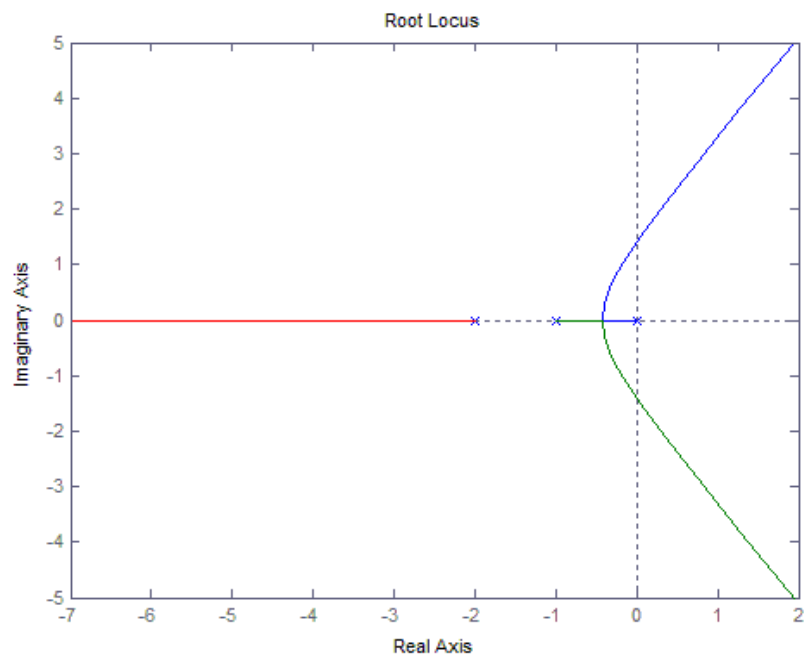
Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι:

$$1 + G(s)F(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{s(s+1)(s+2) + K}{s(s+1)(s+2)} = 0 \Rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

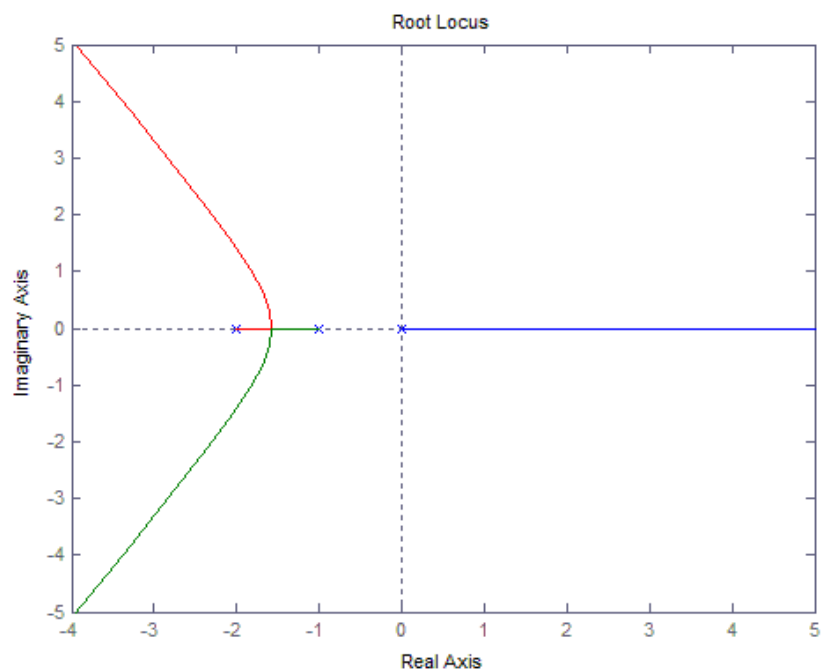
Ο πίνακας Routh είναι

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \frac{K-6}{-3} & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

Για να είναι ευσταθές το κλειστό σύστημα πρέπει $K > 0$ και $K < 6$. Άρα, το σημείο τομής με τον άξονα των φανταστικών αριθμών συμβαίνει για $K = 6$ και είναι το $s = j\omega = \pm j\sqrt{2}$. Αυτό προκύπτει από την $1 + G(s)F(s) = 0$ για $K = 6$, θέτοντας $s = j\omega$ και εξισώνοντας με μηδέν το πραγματικό μέρος. Ο πλήρης γ.τ.ρ. δίνεται στο Σχ. 5.24.



Σχήμα 5.24α. Γεωμετρικός τόπος των ριζών για $K > 0$



Σχήμα 5.24β. Γεωμετρικός τόπος των ριζών για $K < 0$

5.5.3 Αρμονική απόκριση και διαγράμματα Bode

Αρμονική απόκριση ενός συστήματος λέγεται η έξοδος του στη μόνιμη κατάσταση $y_{\mu\sigma\nu}(t)$, όταν η είσοδος του είναι η ημιτονοειδής συνάρτηση.

Θεωρούμε το σύστημα μιας εισόδου – μιας εξόδου με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = K \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}, \quad m < n \quad (5.47)$$

Έστω ότι η είσοδος είναι η ημιτονοειδής συνάρτηση $r(t) = R \sin \omega t$, της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace είναι $R(s) = \frac{R\omega}{s^2 + \omega^2}$. Η απόκριση του συστήματος θα είναι

$$Y(s) = H(s)R(s) = \left[K \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \right] \left[\frac{R\omega}{s^2 + \omega^2} \right] \quad (5.48)$$

Η απόκριση στο πεδίο του χρόνου είναι

$$y(t) = L^{-1} Y(s) = K_1 e^{-p_1 t} + K_2 e^{-p_2 t} + \dots + K_n e^{-p_n t} + K_{n+1} e^{-j\omega t} + K_{n+2} e^{j\omega t} \quad (5.49)$$

Αν όλοι οι πόλοι της $H(s)$ βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο, η χρονική απόκριση στη μόνιμη κατάσταση θα είναι

$$y_{\mu\sigma\nu}(t) = K_{n+1} e^{-j\omega t} + K_{n+2} e^{j\omega t} \quad (5.50)$$

Επειδή

$$K_{n+1} = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s + j\omega)Y(s) = -\frac{H(-j\omega)R}{2j} \quad (5.51)$$

και

$$K_{n+2} = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s - j\omega)Y(s) = \frac{H(-j\omega)R}{2j} \quad (5.52)$$

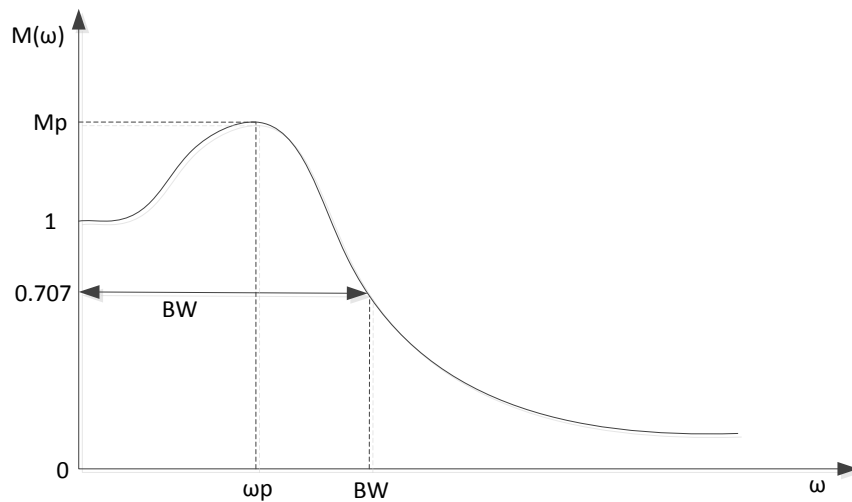
έπεται ότι

$$y_{\mu\sigma\nu}(t) = \frac{R}{2j} \left[-H(-j\omega)e^{-j\omega t} + H(j\omega)e^{j\omega t} \right] = R |H(j\omega)| \sin \omega t + \varphi(\omega) \quad (5.53)$$

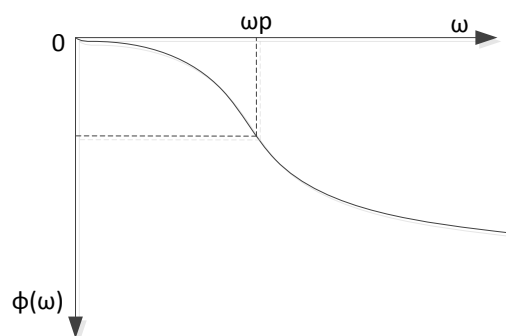
Όπου $|H(j\omega)|$ και $\varphi(\omega)$ είναι το μέτρο και το όρισμα της $H(j\omega)$, αντίστοιχα. Από την (5.53) φαίνεται ότι, αν η $H(j\omega)$ έχει ευσταθείς πόλους, τότε η έξοδος του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση, για ημιτονοειδή είσοδο, δηλαδή η αρμονική απόκριση, είναι και αυτή ημιτονοειδής.

Χαρακτηριστικά της αρμονικής απόκρισης

Θέτοντας $M(\omega) = |H(j\omega)|$, προκειμένου να απλουστευθεί ο συμβολισμός, κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις του πλάτους $M(\omega)$ και της γωνίας $\varphi(\omega)$ συναρτήσει της συχνότητας ω , αντίστοιχα.



Σχήμα 5.25. Γραφική παράσταση πλάτους



Σχήμα 5.26. Γραφική παράσταση γωνίας

Χαρακτηριστικά στοιχεία της καμπύλης του πλάτους είναι τα εξής:

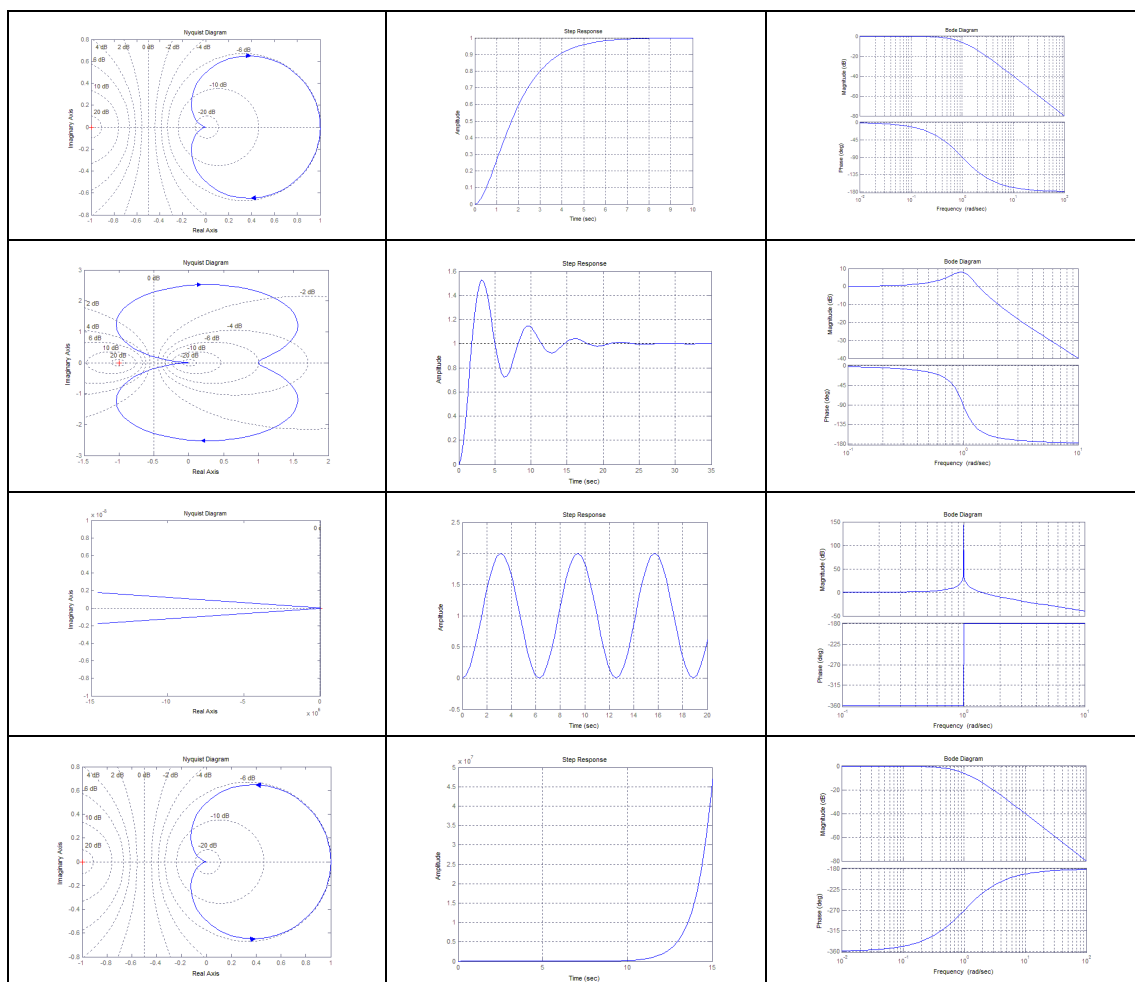
Μέγιστη τιμή M_p ορίζεται ως η μέγιστη τιμή του πλάτους M . Μεγάλες τιμές του M_p αντιστοιχούν σε μεγάλες τιμές υπερύψωσης στη βηματική απόκριση. Στα περισσότερα προβλήματα σχεδίασης η τιμή του M_p λαμβάνεται στο διάστημα από 1.1 έως 1.5.

Συχνότητα συντονισμού ω_p είναι η συχνότητα για την οποία $M(\omega_p) = M_p$.

Εύρος ζώνης BW της καμπύλης του πλάτους είναι η συχνότητα για την οποία $M(\omega_b = BW) = 0.707$. Το εύρος ζώνης είναι αντιστρόφως ανάλογο του χρόνου ανύψωσης της βηματικής απόκρισης.

Το **διάγραμμα Bode** αναφέρεται και αυτό στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μεταφοράς $H(j\omega)$ με παράμετρο την κυκλική συχνότητα ω . Η διαφορά του σε σχέση με το διάγραμμα Nyquist συνίσταται στο ότι αποτελείται από δύο καμπύλες: (α) την γραφική παράσταση του πλάτους σε db (δηλαδή την καμπύλη του $A = 20 \log_{10} M = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$) και (β) την γραφική παράσταση της φάσης (δηλαδή την καμπύλη του ορίσματος $\varphi(\omega)$).

Τόσο το διάγραμμα Bode, όσο και το διάγραμμα Nyquist, δίνουν ουσιαστικά τις ίδιες πληροφορίες. Ωστόσο, το διάγραμμα Bode είναι πιο εύκολο στην κατασκευή του και για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται ευρύτατα στην πράξη. Στο Σχ. 5.27 φαίνεται ο συσχετισμός μεταξύ διαγράμματος Nyquist, χρονικής και αρμονικής απόκρισης.



Σχήμα 5.27. Διάγραμμα Nyquist, χρονική και αρμονική απόκριση συστημάτων

Κατασκευή διαγράμματος Bode

Εξετάζεται, κατ' αρχάς, η κατασκευή του διαγράμματος Bode παραγόντων διαφόρων μορφών που συνήθως εμφανίζονται στη συνάρτηση μεταφοράς. Στη συνέχεια, το ολικό διάγραμμα Bode κατασκευάζεται από τη σύνθεση των επί μέρους διαγραμμάτων των διαφόρων παραγόντων.

Συνήθως, η συνάρτηση μεταφοράς περιέχει παράγοντες της μορφής K , $(j\omega)^{\pm k}$, $(j\omega T + 1)^{\pm k}$ και $[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2]^{\pm k}$, όπου K είναι ο συντελεστής κέρδους, ζ είναι ο συντελεστής απόσβεσης, ω_n είναι η κυκλική συχνότητα και $j\omega$ είναι το φανταστικό μέρος της μιγαδικής συχνότητας. Θα εξετάσουμε τα διαγράμματα Bode των παραγόντων αυτών.

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς βρόχου με παράγοντες πρώτης και δεύτερης τάξης, της μορφής

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{K(j\omega T_1' + 1)(j\omega T_2' + 1)}{(j\omega)^2(j\omega T_1 + 1)[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2]} \quad (5.54)$$

Το διάγραμμα Bode της συνάρτησης αυτής θα αποτελείται από τις καμπύλες του πλάτους A και της φάσης της φ , όπου

$$\begin{aligned} A &= 20\log_{10} M = 20\log_{10} |G(j\omega)F(j\omega)| = \\ &20\log_{10} \frac{|K|(j\omega T_1' + 1)|(j\omega T_2' + 1)|}{|(j\omega)^2|(j\omega T_1 + 1)|[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2]|} = \\ &20\log_{10} |K| + 20\log_{10} |(j\omega T_1' + 1)| + 20\log_{10} |(j\omega T_2' + 1)| - \\ &20\log_{10} |(j\omega)^2| - 20\log_{10} |(j\omega T_1 + 1)| - 20\log_{10} |[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2]| \end{aligned} \quad (5.55)$$

και

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \angle G(j\omega)F(j\omega) = \angle K + \angle(j\omega T_1' + 1) + \angle(j\omega T_2' + 1) - \\ &\angle(j\omega)^2 - \angle(j\omega T_1 + 1) - \angle[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2] \end{aligned} \quad (5.56)$$

Τα διαγράμματα Bode σχεδιάζονται σε ημι-λογαριθμική κλίμακα, όπου ο λογαριθμικός άξονας αντιστοιχεί στη συχνότητα ω .

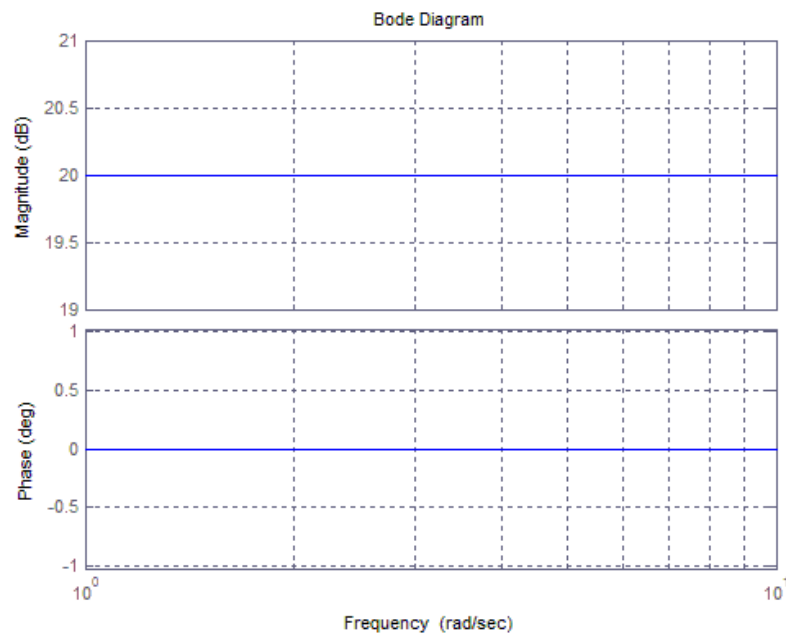
Σταθερός όρος K

Στην περίπτωση αυτή έχουμε

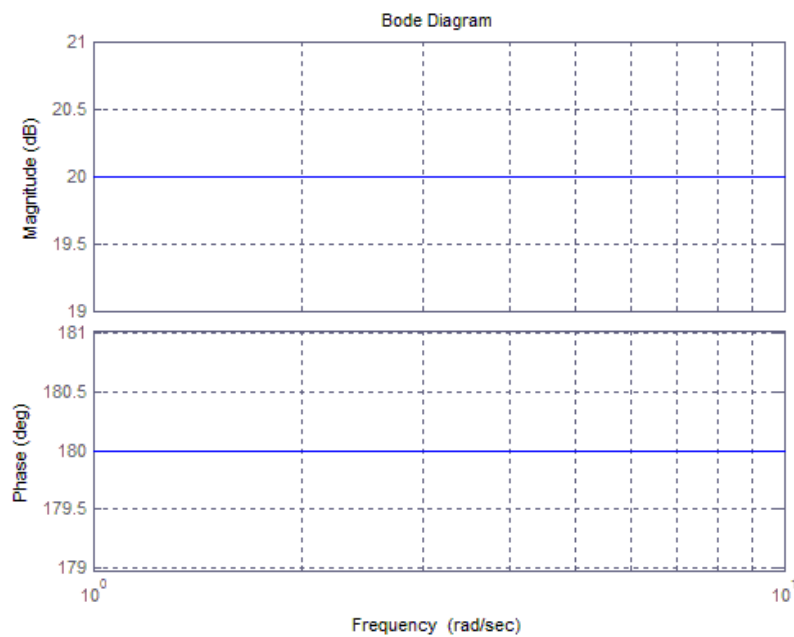
$$A = 20\log_{10} |K| \quad (5.57)$$

$$\varphi = \begin{cases} 0^\circ, & K > 0 \\ 180^\circ, & K < 0 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση των A και φ είναι



Σχήμα 5.28α. Μέτρο και όρισμα σταθερού όρου $K=10$



Σχήμα 5.28β. Μέτρο και όρισμα σταθερού όρου $K=-10$

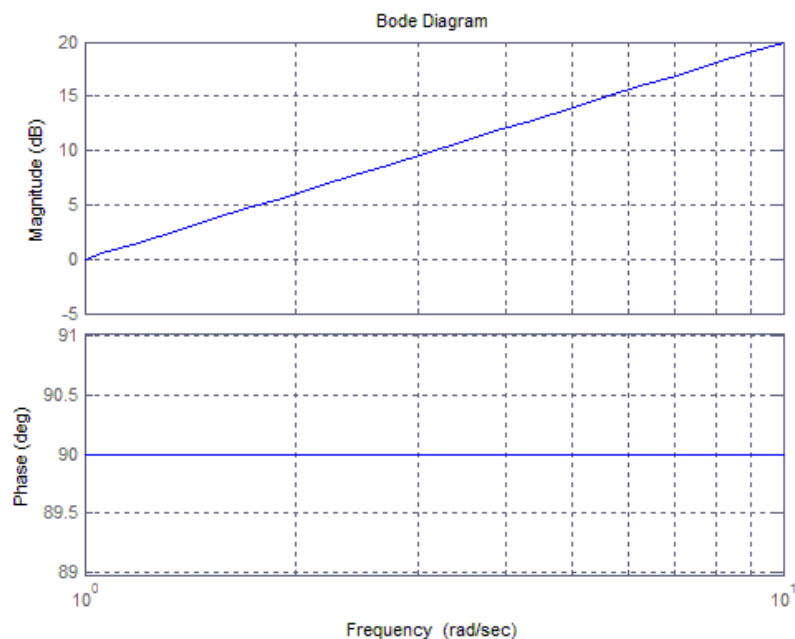
Παράγοντες της μορφής $(j\omega)^{\pm k}$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε

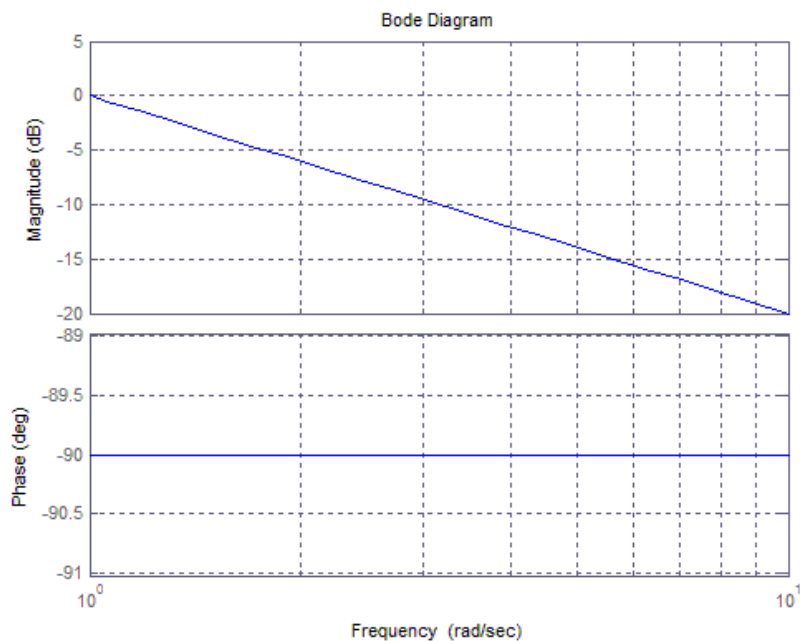
$$A = 20 \log_{10} |(j\omega)^{\pm k}| = \pm 20k \log_{10} \omega \quad (5.58)$$

$$\varphi = \angle (j\omega)^{\pm k} = \pm k 90^\circ$$

Η έκφραση του πλάτους παριστά μία οικογένεια ευθειών γραμμών σε ημι-λογαριθμική κλίμακα. Όλες αυτές οι γραμμές περνούν από το σημείο $A=0$ και $\omega=1$ και έχουν κλίση $\pm 20k$. Η κλίση αυτή είναι σταθερή και διατυπώνεται συνήθως με την έκφραση «20 db ανά δεκάδα». Αυτό σημαίνει ότι για αύξηση της συχνότητας από ω σε 10ω , το πλάτος μεταβάλλεται κατά $\pm 20k$ db. Η γραφική παράσταση των A και φ δίνεται στο Σχ. 5.29.



Σχήμα 5.29α. Μέτρο και όρισμα του $(j\omega)^{+k}$ για $k=1$



Σχήμα 5.29β. Μέτρο και όρισμα του $(j\omega)^{\pm k}$ για $k=-1$

Παράγοντες πρώτης τάξης της μορφής $(j\omega T + 1)^{\pm k}$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$A = \pm 20k \log_{10} |j\omega T + 1| = \pm 20k \log_{10} \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$$

$$\varphi = \pm k \tan^{-1} \omega T$$
(5.59)

Η έκφραση του μέτρου παριστά μία οικογένεια καμπυλών που χαράζονται προσεγγιστικά, λαμβάνοντας υπόψη τα παρακάτω:

$$\text{Για } \begin{cases} \omega \ll 1/T, & A \approx \pm 20k \log_{10} 1 = 0 \\ \omega = 1/T, & A \approx \pm 20k \log_{10} \sqrt{2} \approx \pm 3k \\ \omega \gg 1/T, & A = \pm 20k \log_{10} \omega T \end{cases} \quad (5.60)$$

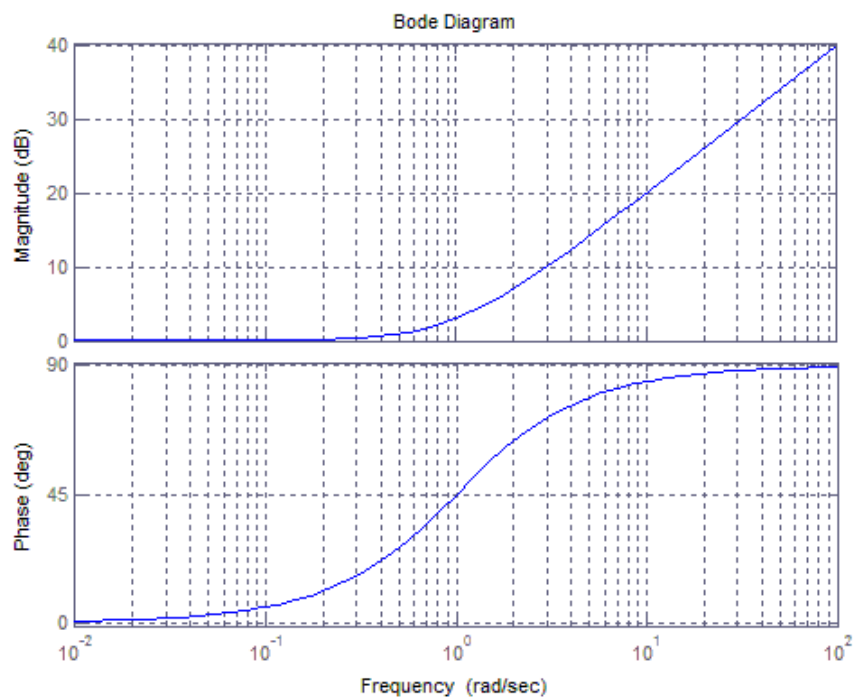
Η συχνότητα $\omega = 1/T$ λέγεται **συχνότητα θλάσης**.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η γραφική παράσταση του πλάτους αποτελείται, κατά προσέγγιση, από δύο ασύμπτωτες ημι-ευθείες: η μία από αυτές συμπίπτει με τον άξονα των 0db, από $\omega = 0$ μέχρι $\omega = 1/T$. Η άλλη έχει κλίση $\pm 20k$ db, από $\omega = 1/T$ μέχρι $\omega \rightarrow \infty$. Στο σημείο $\omega = 1/T$ είναι $A = \pm 3k$ db.

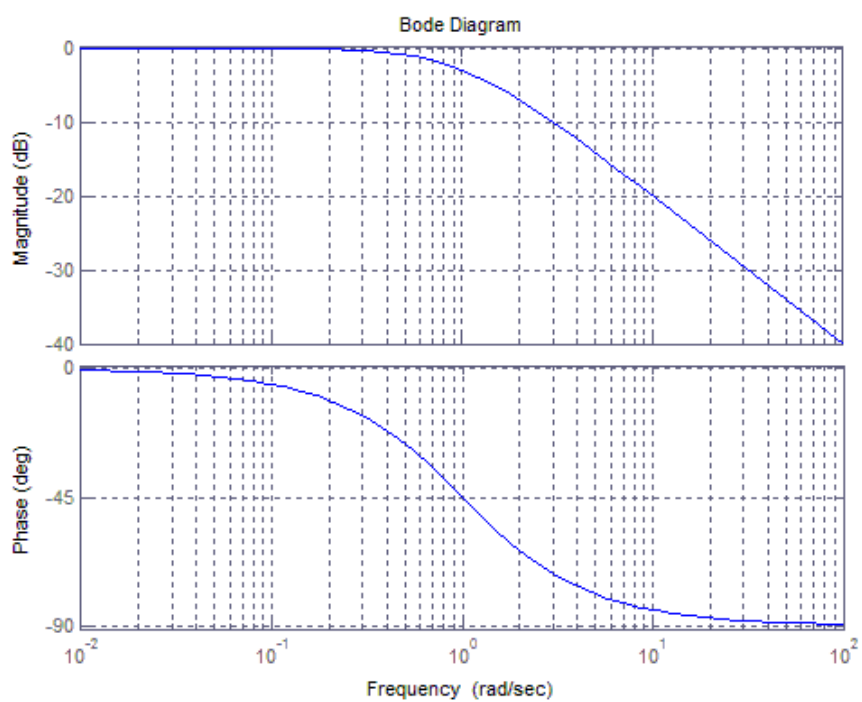
Η γραφική παράσταση της φάσης κατασκευάζεται δίνοντας διάφορες τιμές στο ω και υπολογίζοντας τις αντίστοιχες τιμές της γωνίας φ . Μερικές χαρακτηριστικές τιμές της είναι οι παρακάτω:

$$\text{Για } \begin{cases} \omega = 0, & \varphi = 0^\circ \\ \omega = 1/T, & \varphi = \pm k 45^\circ \\ \omega \rightarrow \infty, & \varphi = \pm k 90^\circ \end{cases} \quad (5.61)$$

Επομένως, η καμπύλη της φάσης αρχίζει από το μηδέν, περνά από το σημείο $\pm k 45^\circ$ και καταλήγει ασυμπτωτικά στην ευθεία $\pm k 90^\circ$. Η γραφικά παράσταση των A και φ , όταν $k = 1$ και $k = -1$, απεικονίζεται στα Σχ. 5.30α και 5.30β.



Σχήμα 5.30α. Μέτρο και όρισμα του $(j\omega T + 1)$



Σχήμα 5.30β. Μέτρο και όρισμα του $(j\omega T + 1)^{-1}$

Παράγοντες δεύτερης τάξης της μορφής $[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + (\omega_n)^2]^{\pm k}$

Ο παράγοντας αυτός γράφεται και με τη μορφή $[(\omega_n)^{-2}(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n^{-1}(j\omega) + 1]^{\pm k}$.

Θέτοντας $u = \omega/\omega_n$, προκύπτει

$$A = \pm 20k \log_{10} \sqrt{(1-u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2} \quad (5.62)$$

$$\varphi = \pm k \tan^{-1} \frac{2\zeta u}{1-u^2}$$

Η γραφική παράσταση του πλάτους κατασκευάζεται προσεγγιστικά.

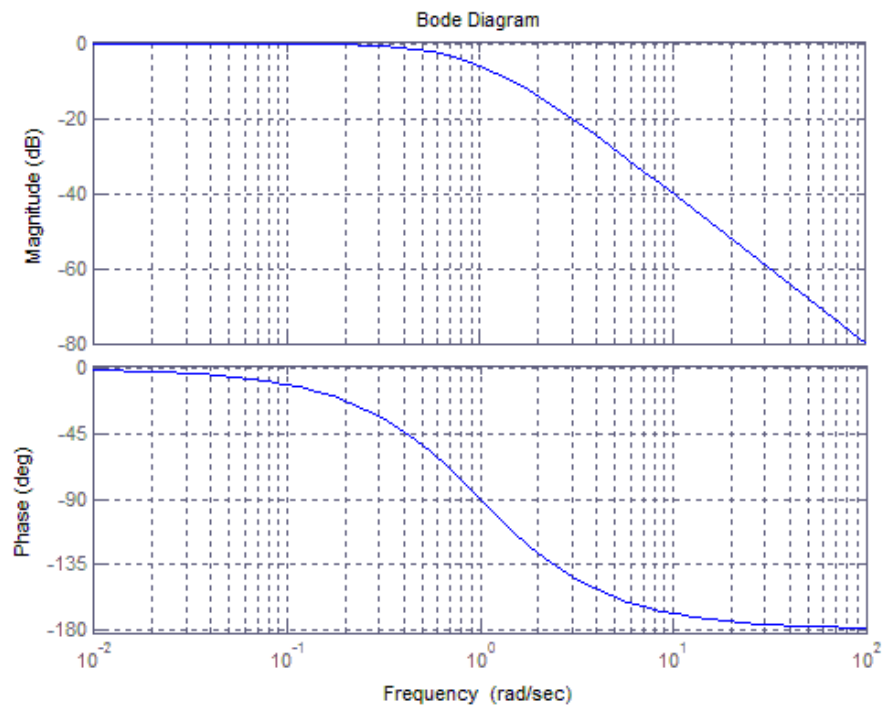
$$\text{Για } \begin{cases} u \ll 1, & A \approx \pm 20k \log_{10} 1 = 0 \\ u \gg 1, & A = 40k \log_{10} u \\ \zeta = 1, & A = \pm 20k \log_{10} |1+u^2| \\ \zeta = 0, & A = \pm 20k \log_{10} |1-u^2| \end{cases} \quad (5.63)$$

Επομένως, η καμπύλη του μέτρου αποτελείται, κατά προσέγγιση, από δύο ασύμπτωτες ημι-ευθείες: Η μία από αυτές συμπίπτει με τον άξονα των 0db και η άλλη έχει κλίση $\pm 40k$ για $u = 1$, δηλαδή για $\omega = \omega_n$. Στην περιοχή του σημείου τομής των δύο ασυμπτώτων η μορφή της καμπύλης επηρεάζεται αποφασιστικά από τον συντελεστή απόσβεσης ζ .

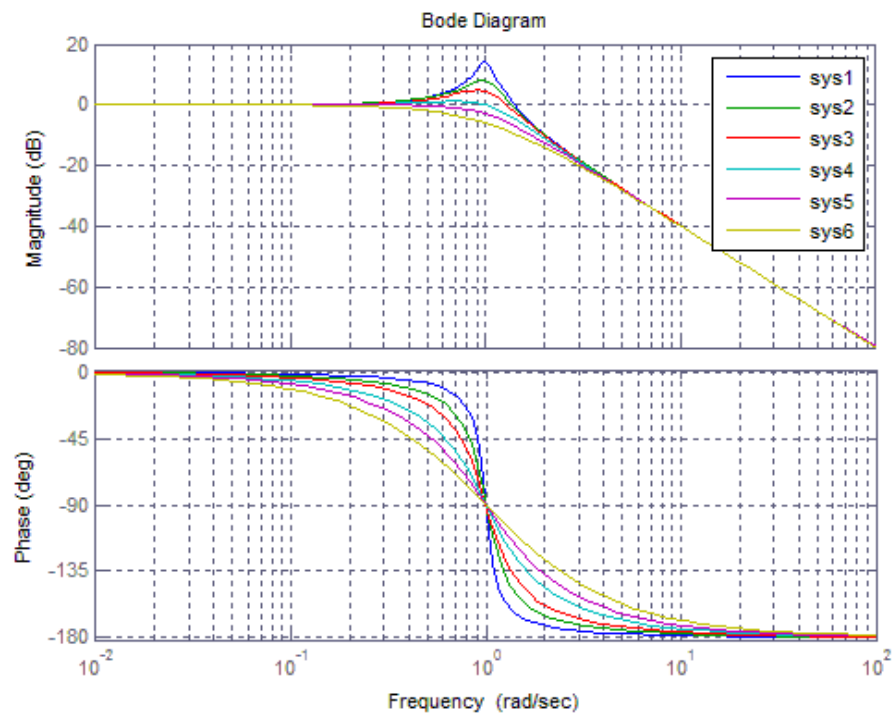
Για την γραφική παράσταση του ορίσματος ισχύει ότι

$$\text{Για } \begin{cases} u = 0, & \varphi = 0^\circ \\ u = 1, & \varphi = \pm k 90^\circ \\ u \rightarrow \infty, & \varphi = \pm k 180^\circ \end{cases} \quad (5.64)$$

Η γραφικά παράσταση των A και φ , όταν $k = -1$, απεικονίζεται στο Σχ. 5.31 για διάφορες τιμές του ζ ($\zeta = 0.1, \zeta = 0.2, \zeta = 0.3, \zeta = 0.5, \zeta = 0.7, \zeta = 1$).



Σχήμα 5.31α. Μέτρο και όρισμα του $[\omega_n^{-2}(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n^{-1}(j\omega) + 1]^{-1}$ για $\zeta = 1$



Σχήμα 5.31β. Μέτρο και όρισμα του $[\omega_n^{-2}(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n^{-1}(j\omega) + 1]^{-1}$ για διάφορες τιμές του ζ (sys1: $\zeta = 0.1$, sys2: $\zeta = 0.2$, sys3: $\zeta = 0.3$, sys4: $\zeta = 0.5$, sys5: $\zeta = 0.7$, sys6: $\zeta = 1$).

Παράδειγμα 5.13

Ζητείται να σχεδιαστεί το διάγραμμα Bode του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + (j\omega) + 2]} \quad (5.65)$$

Λύση

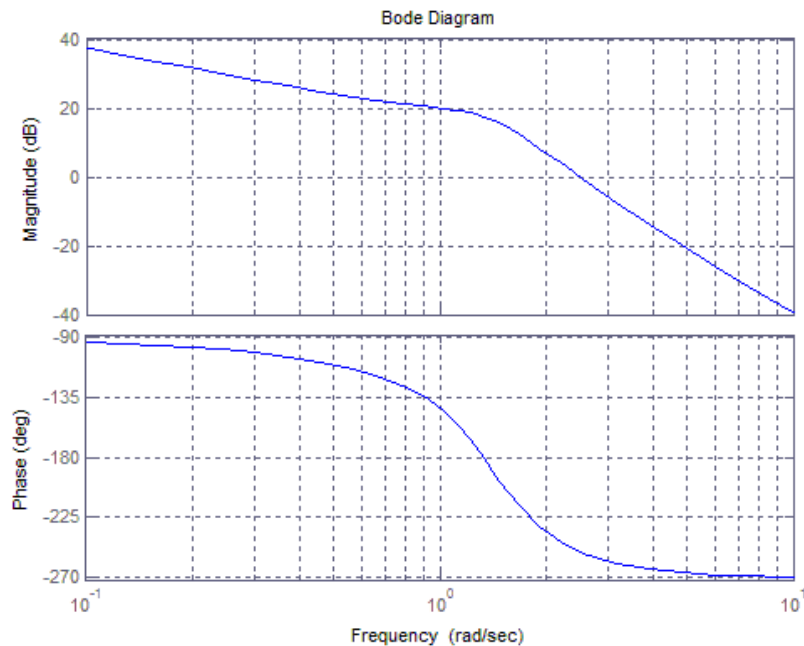
Η συνάρτηση γράφεται σε κανονικοποιημένη μορφή

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{7.5 \left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right]}$$

οπότε έχουμε τους εξής παράγοντες:

$$7.5, (j\omega)^{-1}, \left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right), \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right)^{-1}, \left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right]$$

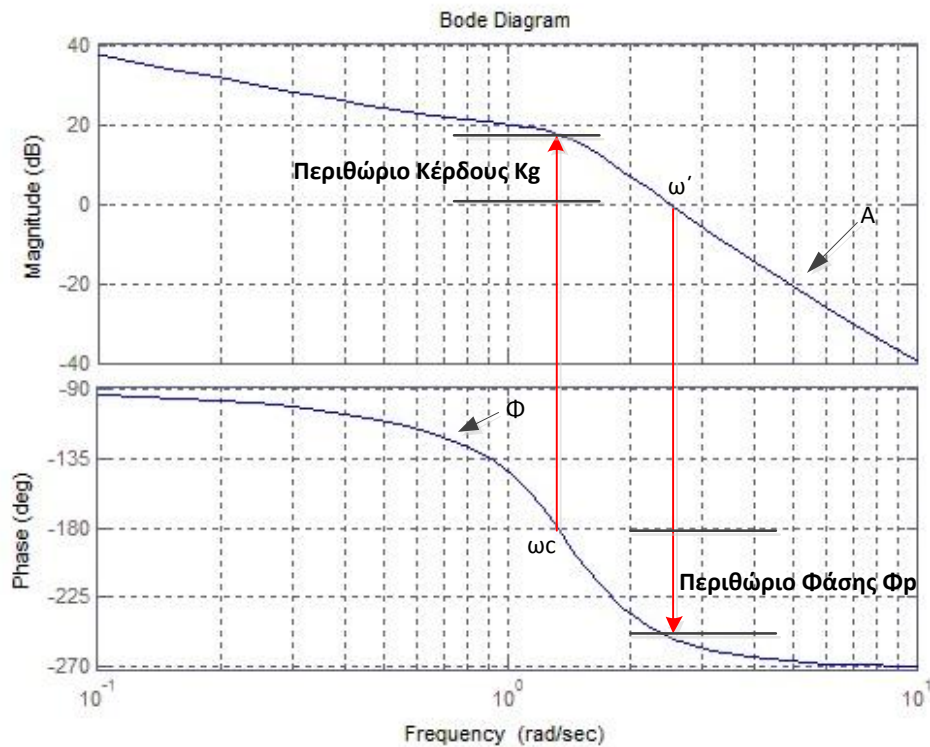
Οι συχνότητες θλάσης του τρίτου, τέταρτου και πέμπτου παράγοντα είναι αντίστοιχα: $\omega = 3$, $\omega = 2$ και $\omega = \sqrt{2}$. Το διάγραμμα Bode του συστήματος δίνεται στο Σχ. 5.32.



Σχήμα 5.32. Διάγραμμα Bode του συστήματος (5.65)

Περιθώρια ενίσχυσης και φάσης

Τα περιθώρια ενίσχυσης και φάσης προσδιορίζονται με βάση όσα αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ας θεωρήσουμε το διάγραμμα Bode μιας συνάρτησης μεταφοράς βρόχου $G(j\omega)F(j\omega)$, όπως στο Σχ. 5.33.



Σχήμα 5.33. Διάγραμμα Bode – περιθώρια κέρδους και φάσης

Στο σχήμα αυτό απεικονίζονται και τα δύο διαγράμματα, πλάτους και φάσης, με κοινό άξονα ω . Οι δύο κατακόρυφοι άξονες είναι βαθμονομημένοι, έτσι ώστε ο ένας να αντιστοιχεί στο πλάτος και ο άλλος στη φάση.

Όταν $\omega = \omega'$, τότε $|G(j\omega')F(j\omega')| = 1$ και επομένως $A = 0$. Όταν $\omega = \omega_c$, τότε $\phi = -180^\circ$. Επομένως,

- (i) το **περιθώριο ενίσχυσης** K_g είναι το κατακόρυφο τμήμα της ευθείας που ενώνει το σημείο $(\omega_c, 0\text{dB})$ με την καμπύλη A και
- (ii) το **περιθώριο φάσης** ϕ_p είναι το κατακόρυφο τμήμα της ευθείας που ενώνει το σημείο $(\omega' -180^\circ)$ με την καμπύλη ϕ .

Για να είναι ευσταθές ένα σύστημα ελάχιστης φάσης, θα πρέπει και τα δύο περιθώρια να είναι θετικά.

5.6 Κύρια σημεία

- Ορισμοί ευστάθειας
- Απόλυτη και σχετική ευστάθεια
- Είδη κριτηρίων ευστάθειας
- Αλγεβρικά κριτήρια
- Κριτήριο Routh
- Κριτήριο Hurwitz
- Διάγραμμα Nyquist – Περιθώρια ευστάθειας
- Γεωμετρικός τόπος των ριζών
- Διάγραμμα Bode

Ασκήσεις Κεφαλαίου 5

Άσκηση 5.1

Να μελετηθεί η ευστάθεια του παρακάτω συστήματος, με βάση τους ορισμούς ευστάθειας.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad x^T(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύση

Για $r(t)=0$ το διάνυσμα κατάστασης είναι $x(t)=\Phi(t)x(0)$. Όπου ο μεταβατικός πίνακας δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = L^{-1} \left\{ [(sI - A)^{-1}] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{\begin{bmatrix} s+3-1 \\ -2-s \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\text{Άρα, } x(t) = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-(s+2)}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{-1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Το μέτρο του διανύσματος κατάστασης είναι

$$\|x(t)\| = \begin{bmatrix} x_1^2(t) & x_2^2(t) \end{bmatrix}^{1/2} = \begin{bmatrix} e^{-2t} + e^{-2t} \end{bmatrix}^{1/2} = \sqrt{2e^{-2t}} = e^{-t} \sqrt{2}$$

$$\|x(t)\| < \sqrt{2}, \quad \forall t > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

Άρα ικανοποιείται η συνθήκη ευστάθειας.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι:

$p(s) = |sI - A| = (s+1)(s+2)$ και έχει ρίζες τις $s_1 = -1$, $s_2 = -2$. Άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

Κρουστική απόκριση: $h(t) = c^T e^{-At} b$

Διαγωνοποίηση του πίνακα κατάστασης:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0$. Από αυτή προκύπτουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -2$. Έτσι, ο πίνακας των ιδιοτιμών του συστήματος είναι

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από τις σχέσεις

$$A u_1 = \lambda_1 u_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \lambda_1 v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_2 \\ -2v_1 - 3v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -2v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Συνεπώς, ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων είναι $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ οπότε και

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Η διαγωνοποιημένη μορφή του πίνακα κατάστασης επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης:

$$h(t) = c^T M e^{-\Lambda t} M^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt = \int_0^{\infty} |e^{-t} - e^{-2t}| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-t} dt + \int_0^{\infty} e^{-2t} dt =$$

$$- \left[e^{-t} \right]_0^{\infty} + \left(-\frac{1}{2} \right) \left[e^{-2t} \right]_0^{\infty} = -(0-1) - \frac{1}{2}(0-1) = 1 + 0.5 = 1.5 < \infty$$

Το αποτέλεσμα αυτό δηλώνει ότι η κρουστική απόκριση έχει ένα πεπερασμένο άνω φράγμα.

Φραγμένη είσοδος

Έστω $|r(t)| < C < \infty$

Η έξοδος είναι

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) r(t-\tau) d\tau, \text{ για την οποία ισχύει}$$

$$|y(t)| \leq \int_0^t |h(\tau)| |r(t-\tau)| d\tau \leq C \int_0^t |h(\tau)| d\tau \leq 1.5C < \infty$$

Συνεπώς και η έξοδος είναι φραγμένη.

Άσκηση 5.2

Να μελετηθεί η ευστάθεια των παρακάτω συστημάτων, των οποίων δίνονται τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα, με τη μέθοδο του κριτηρίου Routh.

$$p(s) = s^3 + 10s^2 + 11s + 6$$

Πίνακας Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 10 & 6 \\ s^1 & 10.4 & 0 \\ s^0 & 6 & 0 \end{array}$$

Το σύστημα είναι ευσταθές.

-

$$p(s) = s^4 + s^3 + s^2 + 2s + 1$$

Πίνακας Routh

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & -1 & 1 & 0 \\ s^1 & 3 & 0 & 0 \\ s^0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Το σύστημα είναι ασταθές και έχει δύο πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο.

$$p(s) = s^3 + s^2 + 2s + 1$$

Πίνακας Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & 1 & 0 \\ s^0 & 1 & 0 \end{array}$$

Το σύστημα είναι ευσταθές.

-

$$p(s) = s^3 + s^2 + 1 = s^3 + s^2 + 0s + 1$$

Πίνακας Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 0 \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & -1 & 0 \\ s^0 & 1 & 0 \end{array}$$

Το σύστημα είναι ασταθές.

-

$$p(s) = s^4 + s^3 + s^2 + 2s + 4$$

Πίνακας Routh

$$\begin{array}{l|lll} s^4 & 1 & 1 & 4 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & -1 & 4 & 0 \\ s^1 & 6 & 0 & 0 \\ s^0 & 4 & 0 & 0 \end{array}$$

Το σύστημα είναι ασταθές και έχει δύο πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο.

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$$

Πίνακας Routh

$$\begin{array}{l|lll} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 2 & 4 & 0 \\ s^2 & 1 & 5 & 0 \\ s^1 & -6 & 0 & 0 \\ s^0 & 5 & 0 & 0 \end{array}$$

Το σύστημα είναι ασταθές και έχει δύο πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο.

$$p(s) = s^5 + s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 2$$

Πίνακας Routh

$$\begin{array}{l|lll} s^5 & 1 & 1 & 2 \\ s^4 & 1 & 2 & 2 \\ s^3 & -1 & 0 & 0 \\ s^2 & 2 & 2 & 0 \\ s^1 & 1 & 0 & 0 \\ s^0 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

Το σύστημα είναι ασταθές και έχει δύο πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο.

Άσκηση 5.3

Για ποιες τιμές της παραμέτρου K είναι ευσταθές το σύστημα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(s) = s^3 + s^2 + Ks + 1$$

Πίνακας Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & K \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & K-1 & 0 \\ s^0 & 1 & 0 \end{array}$$

Το σύστημα είναι ευσταθές για $K > 1$.

Άσκηση 5.4

Να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+1)(2s+1)}$$

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος είναι

$$1 + G(s)F(s) = 1 + \frac{K}{s(s+1)(2s+1)} = \frac{2s^3 + 3s^2 + s + K}{s(s+1)(2s+1)} = 0$$

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(s) = 2s^3 + 3s^2 + s + K$$

Πίνακας Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 2 & 1 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \frac{2K-3}{-3} & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

Συνθήκη ευστάθειας: $K > 0$ και $2K - 3 < 0$. Δηλαδή

$$K \in (0, 1.5).$$

Άσκηση 5.5

Να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{-K}{(s+1)(s+2)}$$

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος είναι

$$1 + G(s)F(s) = 1 + \frac{-K}{(s+1)(s+2)} = \frac{s^2 + 3s + 2 - K}{(s+1)(s+2)} = 0$$

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(s) = s^2 + 3s + 2 - K$$

Πίνακας Routh

$$\begin{array}{l|ll} s^2 & 1 & 2-K \\ s^1 & 3 & 0 \\ s^0 & 2-K & 0 \end{array}$$

Συνθήκη ευστάθειας: $K < 2$.

Άσκηση 5.6

Να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s^3(s+1)}$$

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος είναι

$$1 + G(s)F(s) = 1 + \frac{K}{s^3(s+1)} = \frac{s^4 + s^3 + K}{s^3(s+1)} = 0$$

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(s) = s^4 + s^3 + K$$

Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι ελλιπές, το κλειστό σύστημα θα είναι ασταθές για όλες τις τιμές της σταθεράς ενίσχυσης K .

Άσκηση 5.7

Να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s^2 + a^2}$$

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος είναι

$$1 + G(s)F(s) = 1 + \frac{K}{s^2 + a^2} = \frac{s^2 + a^2 + K}{s^2 + a^2} = 0$$

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(s) = s^2 + a^2 + K$$

Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι ελλιπές, το κλειστό σύστημα θα είναι ασταθές για όλες τις τιμές της σταθεράς ενίσχυσης K .

Άσκηση 5.8

Με τη βοήθεια του διαγράμματος Nyquist, να εξεταστεί αν το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+1)(2s+1)}$$

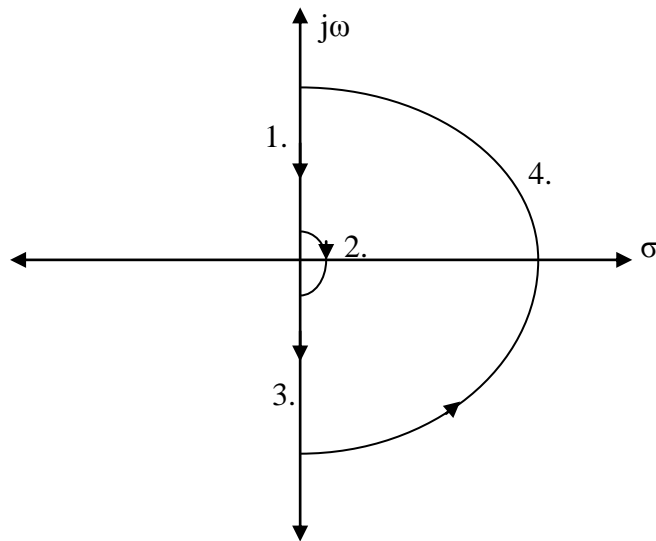
Με $K = 2$ είναι ευσταθές.

Να βρεθεί η κρίσιμη τιμή της ενίσχυσης K για να είναι το σύστημα ευσταθές.

Λύση

Η $G(s)F(s)$ δεν έχει πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο. Άρα, για να είναι το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$ να μην περικλείει το κρίσιμο σημείο $(-1, j0)$.

Δρόμος Nyquist:



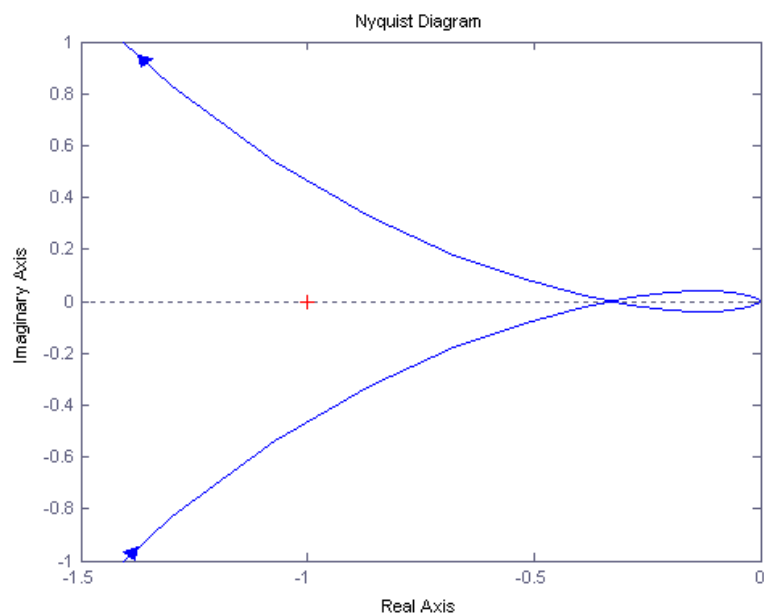
Τμήμα 1.

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(2j\omega+1)} = \frac{K}{\omega\sqrt{(\omega^2+1)(4\omega^2+1)}} \angle -90^\circ - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}2\omega$$

$$\omega \in (\infty, 0^+): \omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(j\infty)F(j\infty) = 0 \angle -90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 0 \angle -270^\circ$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow G(j0)F(j0) = \infty \angle -90^\circ$$

Διάγραμμα Nyquist:



Το σημείο τομής του διαγράμματος Nyquist με τον άξονα των πραγματικών αριθμών προκύπτει μηδενίζοντας το φανταστικό μέρος της $G(j\omega)F(j\omega)$.

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{K}{j\omega(-2\omega^2 + 1 + j3\omega)} = \frac{K}{-3\omega^2 + j\omega(1 - 2\omega^2)} = \frac{K[-3\omega^2 - j\omega(1 - 2\omega^2)]}{9\omega^4 + \omega^2(1 - 2\omega^2)^2}$$

Το φανταστικό μέρος μηδενίζεται για $\omega = 0$ και $\omega = \pm 1/\sqrt{2}$.

Για $\omega = 0 \Rightarrow \varphi(\omega) = -90^\circ$ αδύνατον. Άρα απορρίπτεται η τιμή αυτή και $\omega_c = \pm 1/\sqrt{2} \text{ rad/sec}$

Για $\omega_c = \pm 1/\sqrt{2} \text{ rad/sec}$ έχουμε:

$$|G(j\omega_c)F(j\omega_c)| = \frac{K - 3/2}{9 \cdot 1/4} = K \left(\frac{-2}{3} \right)$$

Αυτό είναι το σημείο τομής με τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Για $K = 2$ έχουμε:

$$|G(j\omega_c)F(j\omega_c)| = \left(\frac{-4}{3} \right)$$

Το σημείο αυτό βρίσκεται αριστερότερα από το κρίσιμο σημείο και επομένως το σύστημα είναι ασταθές.

Για να είναι ευσταθές το σύστημα θα πρέπει $-1 < -\frac{2K}{3} \Rightarrow K < \frac{3}{2} = 1.5$

Άσκηση 5.9

Να προσδιοριστεί με τη βοήθεια του διαγράμματος Nyquist η κρίσιμη τιμή της ενίσχυσης K για την οποία το κλειστό σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

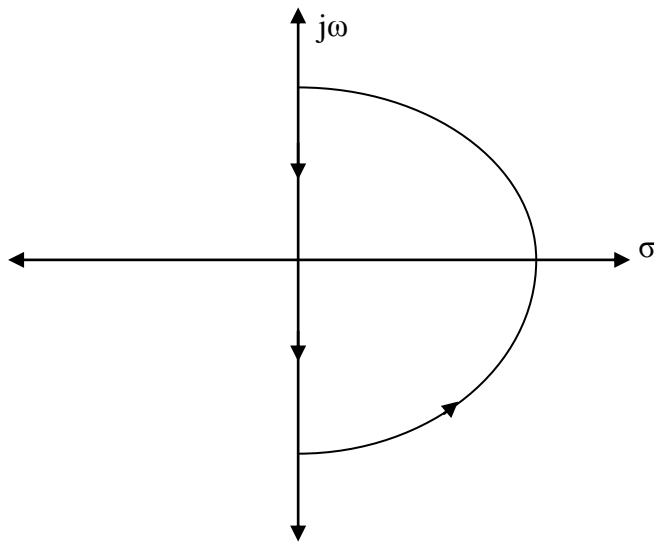
$$G(s)F(s) = \frac{-K}{(s+1)(2s+1)}$$

γίνεται ασταθές.

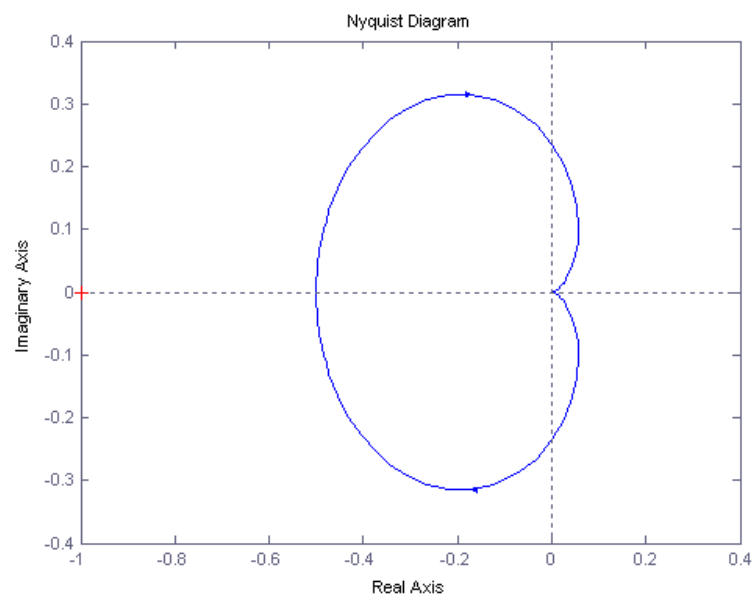
Λύση

Η $G(s)F(s)$ δεν έχει πόλο στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο. Άρα, για να είναι το κλειστό σύστημα ευσταθές, θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist να μην περικλείει το κρίσιμο σημείο.

Δρόμος Nyquist:



Διάγραμμα Nyquist:



$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{-K}{(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}} \angle 180^\circ - \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{2}$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(j\omega)F(j\omega) = 0 \angle 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow G(j\omega)F(j\omega) = \frac{K}{2} \angle 180^\circ$$

Άρα, το σημείο τομής του διαγράμματος Nyquist με τον άξονα των πραγματικών αριθμών προκύπτει για $\omega = 0$.

Αυτό προκύπτει και ως εξής:

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{-K}{-\omega^2 + 2 + j3\omega} = \frac{-K(-\omega^2 + 2 - j3\omega)}{9\omega^2 + (2 - \omega^2)^2}$$

Το φανταστικό μέρος μηδενίζεται για $\omega = 0$. Τότε ισχύει

$$G(j0)F(j0) = \frac{-K}{2}$$

Άρα, το σημείο τομής με τον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι το $-K/2$ και πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$\frac{-K}{2} > -1 \Rightarrow K < 2. \text{ Η κρίσιμη τιμή για την ευστάθεια είναι } K = 2.$$

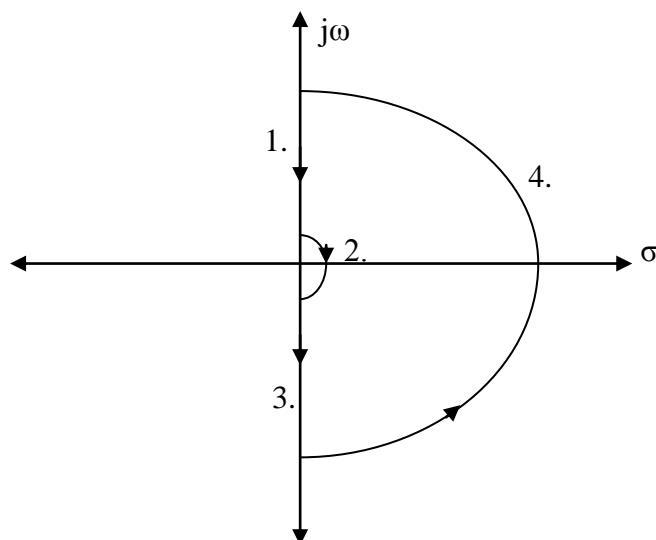
Άσκηση 5.10

Με τη βοήθεια του διαγράμματος Nyquist, να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{1}{s^3(s+1)}$$

Λύση

Δρόμος Nyquist:



Τμήμα 1.

$$s = j\omega, \omega \in (\infty, 0^+)$$

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2(j\omega)(j\omega+1)} = \frac{1}{\omega^3\sqrt{(\omega^2+1)}} \angle -180^\circ - 90^\circ - \tan^{-1}\omega =$$

$$\frac{1}{\omega^3\sqrt{(\omega^2+1)}} \angle -270^\circ - \tan^{-1}\omega$$

$$\omega \in (\infty, 0^+): \omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(j\infty)F(j\infty) = 0 \angle -270^\circ - 90^\circ = 0 \angle 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow G(j0)F(j0) = \infty \angle -270^\circ$$

Τμήμα 2.

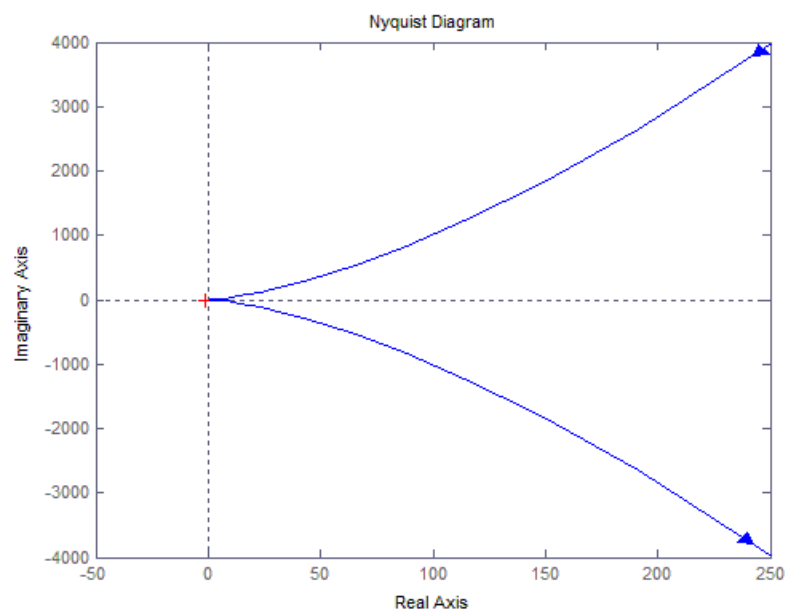
$$\omega \in (0^+, 0^-), s = \rho e^{j\theta}, \theta \in (90^\circ, -90^\circ)$$

$$G(s)F(s) = \frac{1}{(\rho e^{j\theta})^3(\rho e^{j\theta} + 1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{(\rho e^{j\theta})^3} = \infty e^{-j3\theta}$$

$$-3\theta \in (-270^\circ, 270^\circ)$$

$$270^\circ - (-270^\circ) = 540^\circ = 360^\circ + 180^\circ$$

Δηλαδή, καθώς ο δρόμος Nyquist διαγράφει τον μικρό κύκλο, το διάγραμμα Nyquist διαγράφει μία πλήρη περιφορά συν 180° . Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το κλειστό σύστημα να είναι πάντα ασταθές.



Άσκηση 5.11

Δίνεται το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

Να βρεθούν:

Οι τιμές του K για τις οποίες το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές

Το περιθώριο ενίσχυσης για K=2 και K=40

Λύση

Επειδή η $G(s)F(s)$ δεν έχει πόλο στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο, θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist να μη περικλείει το κρίσιμο σημείο.

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+4)} = \frac{K}{-5\omega^2 - j\omega(\omega^2-4)} = \frac{K[-5\omega^2 + j\omega(\omega^2-4)]}{25\omega^4 + \omega^2(\omega^2-4)^2}$$

Η κρίσιμη συχνότητα προκύπτει, όταν μηδενίζεται το φανταστικό μέρος, δηλαδή όταν $\omega(\omega^2-4) = 0$. Αυτό συμβαίνει για $\omega = 0 \text{ rad/sec}$ και για $\omega = \pm 2 \text{ rad/sec}$.

Επειδή $\varphi(\omega) = -90^\circ - \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{4}$, θα είναι

$\varphi(0) = -90^\circ$, απορρίπτεται

$$\varphi(2) = -90^\circ - \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} \frac{1}{2}$$

$$G(j2)F(j2) = -\frac{K}{20}$$

Η κρίσιμη τιμή του K είναι K=20.

Περιθώρια ενίσχυσης:

$$K_g = -20 \log_{10} \left| -\frac{2}{20} \right| = 20 \text{ db} \text{ ευσταθές}$$

$$K_g = -20 \log_{10} \left| -\frac{40}{20} \right| = -20 \log_{10} 2 \text{ db} \text{ ασταθές}$$

Άσκηση 5.12

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K(s+1)(s+2)}{s(s+0.5)}, \quad K > 0$$

Λύση

Τα σημεία εκκίνησης του γ.τ.ρ. είναι οι πόλοι της $G(s)F(s)$, δηλαδή τα σημεία $s=0$, $s=-0.5$.

Τα σημεία άφιξης του γ.τ.ρ. είναι $s=-1$ και $s=-2$

Ο αριθμός των διακεκριμένων κλάδων του γ.τ.ρ. είναι: $\max(2, 2) = 2$.

Οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι:

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2-2}$$

Δηλαδή δεν υπάρχουν ασύμπτωτες.

Τα τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στον γ.τ.ρ. είναι:

$(-2, -1)$ και $(-0.5, 0)$

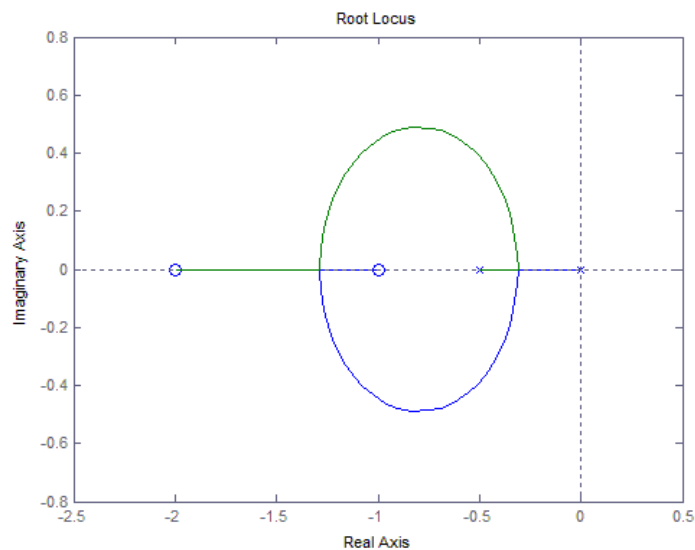
Τα σημεία θλάσης του γ.τ.ρ. προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης:

$$\frac{d[G(s)F(s)]}{ds} = 0 \Rightarrow \dots s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{6}}{5}$$

Οι τιμές αυτές ικανοποιούν την $1+G(s)F(s)=0$ για πραγματικές και θετικές τιμές του K .

Επειδή δεν υπάρχουν μιγαδικοί πόλοι δεν υπάρχουν και οι αντίστοιχες γωνίες εκκίνησης.

Ο πλήρης γ.τ.ρ. δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Επειδή κανένας κλάδος του γ.τ.ρ. δεν περνάει στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο, έπεται ότι το σύστημα είναι ευσταθές για κάθε $K > 0$.

Άσκηση 5.13

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{Ks(s+2)}{(s+1)(s+3)}, \quad K > 0$$

Λύση

Τα σημεία εκκίνησης του γ.τ.ρ. είναι τα σημεία $s = -1$, $s = -3$.

Τα σημεία άφιξης του γ.τ.ρ. είναι $s = 0$ και $s = -2$

Ο αριθμός των διακεκριμένων κλάδων του γ.τ.ρ. είναι: $\max(2, 2) = 2$.

Οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι:

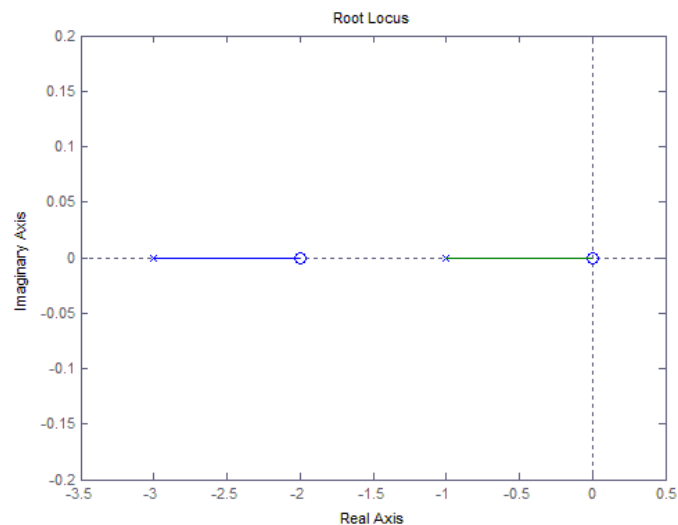
$$\vartheta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2-2}$$

Δηλαδή δεν υπάρχουν ασύμπτωτες.

Τα τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στον γ.τ.ρ. είναι:

$(-1, 0)$ και $(-3, -2)$.

Ο πλήρης γ.τ.ρ. δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Επειδή κανένας κλάδος του γ.τ.ρ. δεν περνάει στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο, έπεται ότι το σύστημα είναι ευσταθές για κάθε $K > 0$.

Άσκηση 5.14

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 10)}{s(s+1)(s+2)}, \quad K > 0$$

Λύση

Τα σημεία εκκίνησης του γ.τ.ρ. είναι τα σημεία $s = 0$, $s = -1$, $s = -2$.

Τα σημεία άφιξης του γ.τ.ρ. είναι $s = -1 + 3j$ και $s = -1 - 3j$.

Ο αριθμός των διακεκριμένων κλάδων του γ.τ.ρ. είναι: $\max(2, 3) = 3$.

Οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι:

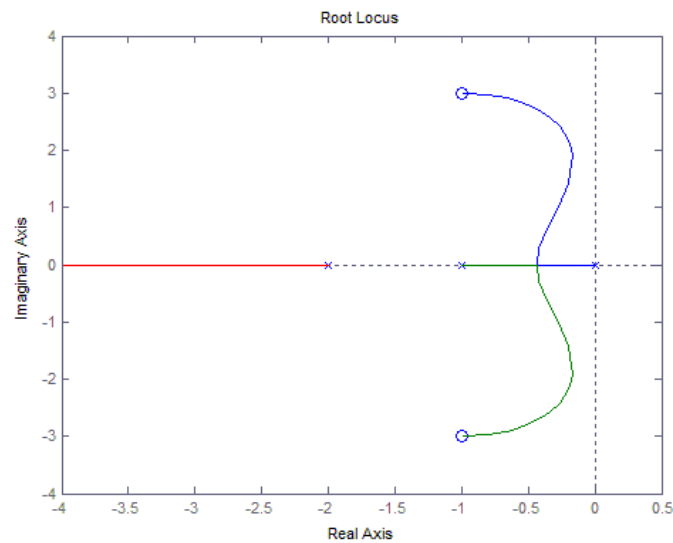
$$\vartheta_k = \frac{(2k+1)\pi}{3-2}, \text{ για } k = 0 \Rightarrow \vartheta_0 = \pi$$

Σημείο θλάσης: μεταξύ των σημείων -1 και 0.

Τα τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στον γ.τ.ρ. είναι:

$(-\infty, -2)$ και $(-1, 0)$.

Ο πλήρης γ.τ.ρ. δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Επειδή κανένας κλάδος του γ.τ.ρ. δεν περνάει στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο, έπεται ότι το σύστημα είναι ευσταθές για κάθε $K > 0$.

Άσκηση 5.15

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 10)}{s(s + 3)}, \quad K > 0$$

Λύση

Τα σημεία εκκίνησης του γ.τ.ρ. είναι τα σημεία $s = 0$, $s = -3$.

Τα σημεία άφιξης του γ.τ.ρ. είναι $s = -1 + 3j$ και $s = -1 - 3j$.

Ο αριθμός των διακεκριμένων κλάδων του γ.τ.ρ. είναι: $\max(2, 2) = 2$.

Οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι:

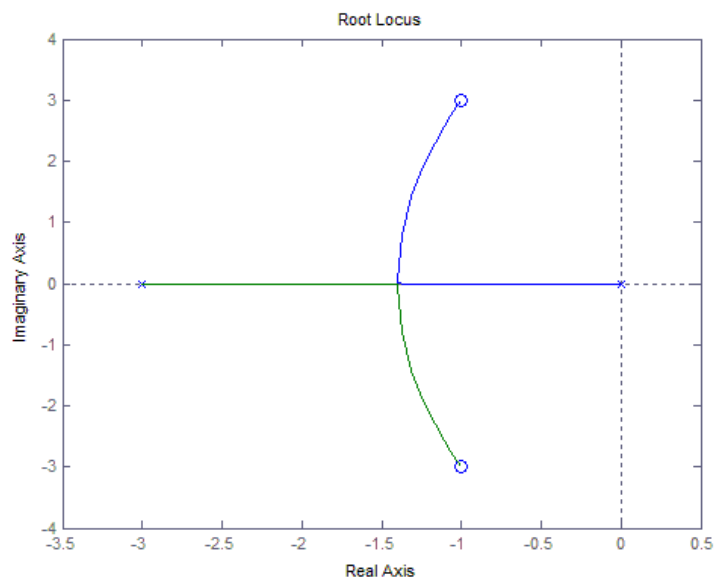
$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2-2}$$

Άρα δεν υπάρχουν ασύμπτωτες.

Τα τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στον γ.τ.ρ. είναι: $(-3, 0)$.

Σημείο θλάσης: μεταξύ των σημείων -3 και 0.

Ο πλήρης γ.τ.ρ. δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Επειδή κανένας κλάδος του γ.τ.ρ. δεν περνάει στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο, έπεται ότι το σύστημα είναι ευσταθές για κάθε $K > 0$.

Άσκηση 5.16

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s^2+2s+2)}, \quad K > 0$$

Λύση

Τα σημεία εκκίνησης του γ.τ.ρ. είναι οι πόλοι της $G(s)F(s)$, δηλαδή τα σημεία $s=0$, $s=-1$, $s=-1 \pm j$.

Τα σημεία άφιξης του γ.τ.ρ. είναι $s=-3$ και για $s \rightarrow \infty$.

Ο αριθμός των διακεκριμένων κλάδων του γ.τ.ρ. είναι: $\max(4,1) = 4$.

Οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι:

$$\vartheta_k = \frac{(2k+1)\pi}{4-1}, \quad k=0,1,2 \text{ άρα } \vartheta_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \vartheta_1 = \pi, \quad \vartheta_2 = \frac{5\pi}{3},$$

Το σημείο τομής των ασυμπτώτων είναι

$$\sigma = \frac{0+(-1)+(-1+j)+(-1-j)-(-3)}{3} = \frac{-1-2+3}{3} = 0$$

Τα τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στον γ.τ.ρ. είναι: $(-\infty, -3)$ και $(-1, 0)$

Γωνίες αναχώρησης από τους μιγαδικούς πόλους:

$$\begin{aligned} \vartheta_{-1+j} &= -180^\circ - \underbrace{\angle s}_{s=-1+j} - \underbrace{\angle s+1+j}_{s=-1+j} - \underbrace{\angle s+1}_{s=-1+j} + \underbrace{\angle s+3}_{s=-1+j} = \\ &= -180^\circ - \angle -1-j - \angle 2j - \angle j + \angle 2+j = -180^\circ - 135^\circ - 90^\circ - 90^\circ + 27^\circ = -108^\circ \end{aligned}$$

Λόγω της συμμετρίας θα είναι: $\vartheta_{-1-j} = 108^\circ$.

Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα των φανταστικών αριθμών, εργαζόμαστε ως εξής:

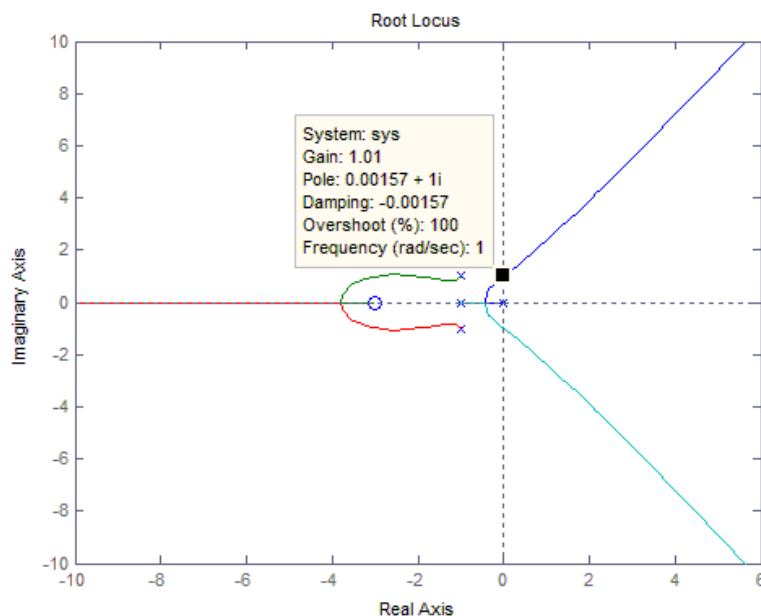
Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι:

$$1 + G(s)F(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s^2+2s+2)} = 0 \Rightarrow s^4 + 3s^3 + 4s^2 + (2+K)s + 3K = 0$$

Ο πίνακας Routh είναι

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 4 & 3K \\ s^4 & 3 & 2+K & 0 \\ s^3 & \frac{10-K}{3} & 3K & 0 \\ s^2 & \frac{K^2+19K-20}{K-10} & 0 & 0 \\ s^1 & 3K & 0 & 0 \\ s^0 & & & \end{array}$$

Για να είναι ευσταθές το κλειστό σύστημα πρέπει $K > 0$, $K < 10$. Επίσης $K \in (-20, 1)$. Οι ανισότητες αυτές συναληθεύουν για $K \in (0, 1)$. Άρα, το σημείο τομής με τον άξονα των φανταστικών αριθμών συμβαίνει για $K = 1$. Ο πλήρης γ.τ.ρ. δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Άσκηση 5.17

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 5)(s^2 + 4s + 5)}, \quad K > 0$$

Λύση

Τα σημεία εκκίνησης του γ.τ.ρ. είναι οι πόλοι της $G(s)F(s)$, δηλαδή τα σημεία $-1 \pm 2j$ και $-2 \pm j$.

Τα σημεία άφιξης του γ.τ.ρ. είναι για $s \rightarrow \infty$.

Ο αριθμός των διακεκριμένων κλάδων του γ.τ.ρ. είναι: $\max(0, 4) = 4$.

Οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι:

$$\vartheta_k = \frac{(2k+1)\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad \text{άρα} \quad \vartheta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \vartheta_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad \vartheta_2 = \frac{5\pi}{4}, \quad \vartheta_3 = \frac{7\pi}{4}$$

Το σημείο τομής των ασυμπτώτων είναι

$$\sigma = \frac{(-1+2j) + (-1-2j) + (-2+j) + (-2-j)}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

Γωνίες αναχώρησης από τους μιγαδικούς πόλους:

$$\begin{aligned} \vartheta_{-1+2j} &= -180^\circ - \angle_{s=-1+2j} s+1+2j - \angle_{s=-1+2j} s+2-j - \angle_{s=-1+2j} s+2+j = \\ &= -180^\circ - \angle_{s=-1+2j} 4j - \angle_{s=-1+2j} 1+j - \angle_{s=-1+2j} 1+3j = -180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - 71.57^\circ = -386.57^\circ = -26.57^\circ \end{aligned}$$

Λόγω της συμμετρίας θα είναι: $\vartheta_{-1-2j} = 26.57^\circ$.

$$\begin{aligned} \vartheta_{-2+j} &= -180^\circ - \angle_{s=-2+j} s+1-2j - \angle_{s=-2+j} s+1+2j - \angle_{s=-2+j} s+2+j = \\ &= -180^\circ - \angle_{s=-2+j} -1+j - \angle_{s=-2+j} -1+3j - \angle_{s=-2+j} 2j = \\ &= -180^\circ - 225^\circ - 108.43^\circ - 90^\circ = -603.43^\circ = -243.43^\circ = 116.57^\circ \end{aligned}$$

$$\vartheta_{-2-j} = -116.57^\circ$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα των φανταστικών αριθμών, εργαζόμαστε ως εξής:

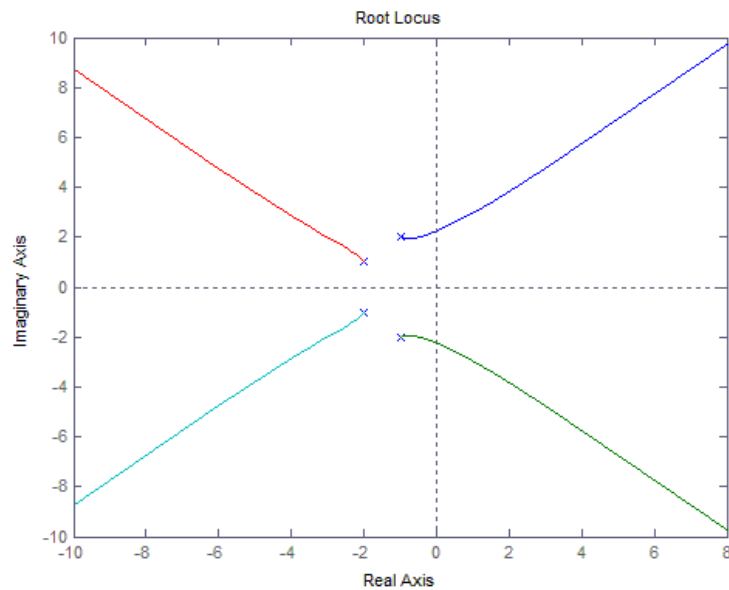
Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι:

$$1 + G(s)F(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K}{(s^2 + 2s + 5)(s^2 + 4s + 5)} = 0 \Rightarrow s^4 + 6s^3 + 18s^2 + 30s + 25 + K = 0$$

Ο πίνακας Routh είναι

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 18 & 25+K \\ s^3 & 6 & 30 & 0 \\ s^2 & 13 & 25+K & 0 \\ s^1 & \frac{6K-240}{-13} & 0 & 0 \\ s^0 & 25+K & 0 & 0 \end{array}$$

Για να είναι ευσταθές το κλειστό σύστημα πρέπει $K < 40$. Άρα, το σημείο τομής με τον άξονα των φανταστικών αριθμών συμβαίνει για $K = 40$. Ο πλήρης γ.τ.ρ. δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Άσκηση 5.18

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{(s+2)^2}, \quad K > 0$$

Λύση

Τα σημεία εκκίνησης του γ.τ.ρ. είναι τα σημεία $s_{1,2} = -2$, **διπλή ρίζα**.

Τα σημεία άφιξης του γ.τ.ρ. είναι για $s \rightarrow \infty$

Ο αριθμός των διακεκριμένων κλάδων του γ.τ.ρ. είναι: $\max(2, 0) = 2$.

Τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στο γ.τ.ρ.: κανένα

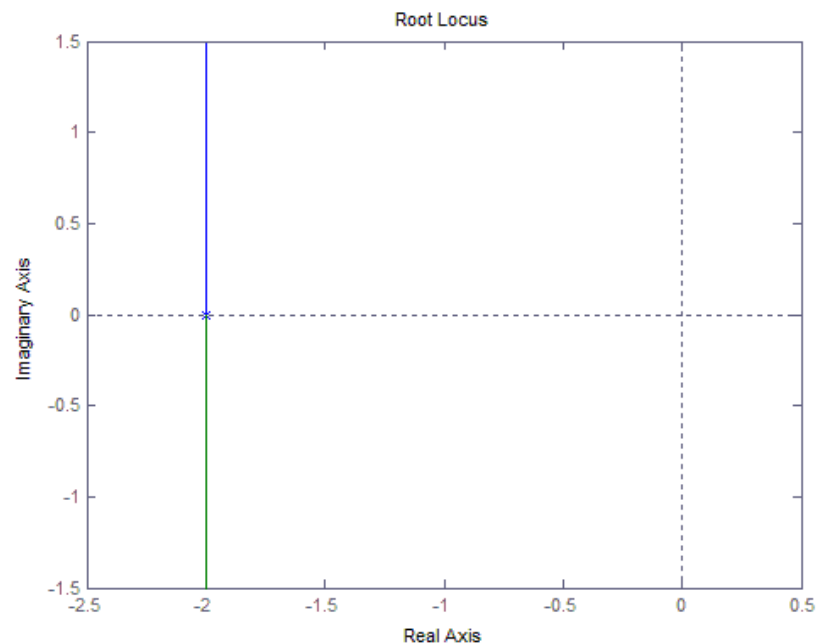
Οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι:

$$\vartheta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k = 0, 1 \text{ άρα } \vartheta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_1 = \frac{3\pi}{2}$$

Το σημείο τομής των ασυμπτώτων είναι

$$\sigma = \frac{(-2) + (-2)}{2} = -2$$

. Ο πλήρης γ.τ.ρ. δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές για κάθε $K > 0$

Άσκηση 5.19

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{(s+1)^3}, \quad K > 0$$

Λύση

Τα σημεία εκκίνησης του γ.τ.ρ. είναι τα σημεία $s_{1,2,3} = -1$, **τριπλή ρίζα**.

Τα σημεία άφιξης του γ.τ.ρ. είναι για $s \rightarrow \infty$

Ο αριθμός των διακεκριμένων κλάδων του γ.τ.ρ. είναι: $\max(3, 0) = 3$.

Τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στο γ.τ.ρ.: τα διαστήματα $(-\infty, -1)$.

Οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι:

$$\vartheta_k = \frac{(2k+1)\pi}{3}, \quad k=0,1,2 \quad \text{άρα} \quad \vartheta_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \vartheta_1 = \pi, \quad \vartheta_2 = \frac{5\pi}{3}$$

Το σημείο τομής των ασυμπτώτων είναι

$$\sigma = \frac{(-1)+(-1)+(-1)}{3} = -1$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι:

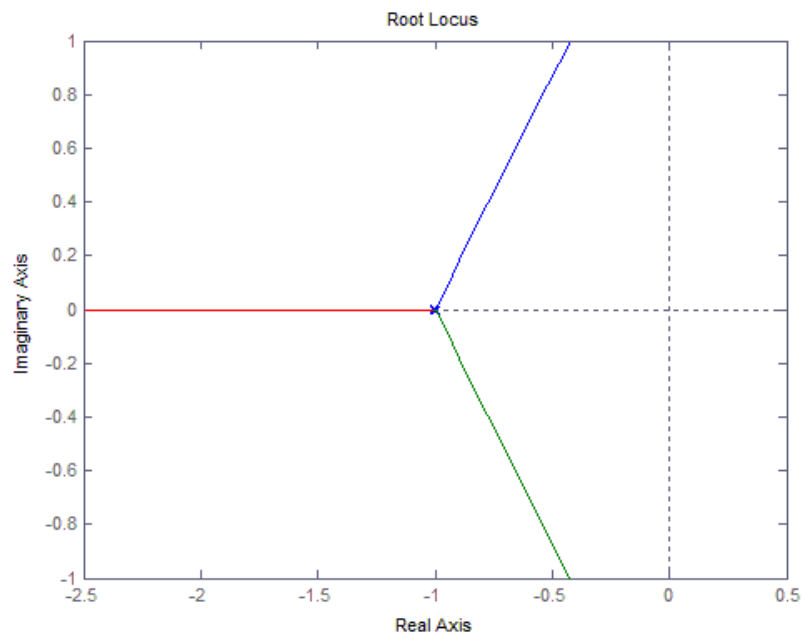
$$1 + G(s)F(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K}{(s+1)^3} = 0 \Rightarrow s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K = 0$$

Ο πίνακας Routh είναι

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 3 & 1+K \\ s^1 & \frac{K-9}{-3} & 0 \\ s^0 & 1+K & 0 \end{array}$$

Το σύστημα είναι ευσταθές για $K < 9$.

Ο πλήρης γ.τ.ρ. δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Άσκηση 5.20

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+2)^2}, \quad K > 0$$

Λύση

Τα σημεία εκκίνησης του γ.τ.ρ. είναι τα σημεία $s_{1,2} = -2$, **διπλή ρίζα** και $s = 0$.

Τα σημεία άφιξης του γ.τ.ρ. είναι για $s \rightarrow \infty$

Ο αριθμός των διακεκριμένων κλάδων του γ.τ.ρ. είναι: $\max(3, 0) = 3$.

Τμήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών που ανήκουν στο γ.τ.ρ.: τα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $(-2, 0)$.

Οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι:

$$\vartheta_k = \frac{(2k+1)\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2 \text{ άρα } \vartheta_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \vartheta_1 = \pi, \quad \vartheta_2 = \frac{5\pi}{3}$$

Το σημείο τομής των ασυμπτώτων είναι

$$\sigma = \frac{(-2) + (-2)}{3} = -1.333$$

Σημείο θλάσης: $s = -\frac{2}{3}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι:

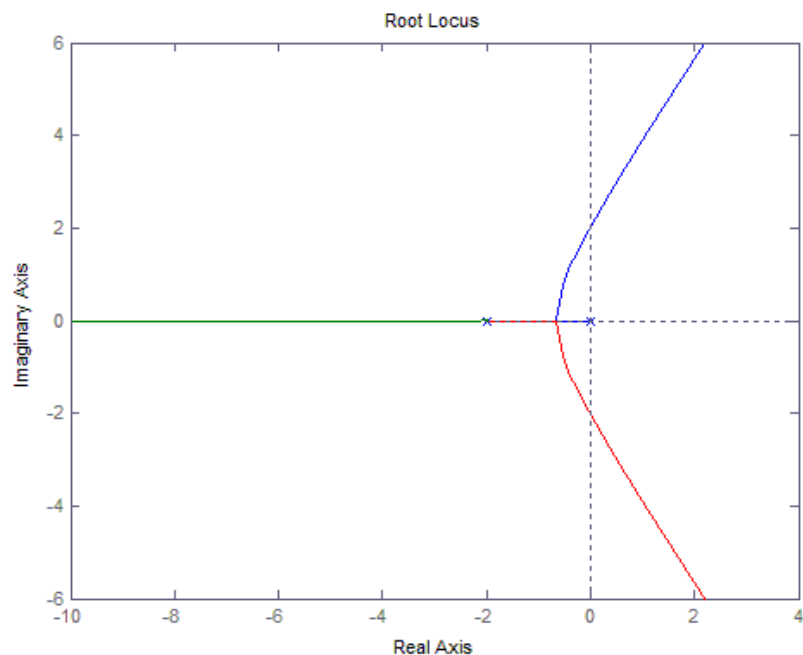
$$1 + G(s)F(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K}{s(s+2)^2} = 0 \Rightarrow s^3 + 4s^2 + 4s + K = 0$$

Ο πίνακας Routh είναι

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 4 & K \\ s^1 & \frac{K-16}{4} & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

Το σύστημα είναι ευσταθές για $K < 16$.

Ο πλήρης γ.τ.ρ. δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Άλυτες Ασκήσεις

Άσκηση Α5.1

Δίνεται το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$

Να μελετηθεί η ευστάθεια του κλειστού συστήματος και να βελτιωθεί με την προσθήκη ενός μηδενικού σε κατάλληλο σημείο.

Άσκηση Α5.2

Θεωρούμε το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{(s+3)(s+4)}, K > 0.$$

(α) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα Nyquist και να μελετηθεί η ευστάθεια του κλειστού συστήματος.

(β) Να βρεθεί η τιμή της κρίσιμης συχνότητας ω_c και το περιθώριο ενίσχυσης για $K = 6$.

Άσκηση A5.3

Δίνεται το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

με $K > 0$. Να βρεθούν:

1. Η κρίσιμη συχνότητα ω_c και το σημείο τομής του διαγράμματος Nyquist με τον άξονα των πραγματικών αριθμών.
2. Το περιθώριο ενίσχυσης για $K=0.6$ και $K=12$. Τι σημαίνουν οι τιμές αυτές για την ευστάθεια του κλειστού συστήματος;

Άσκηση A5.4

Δίνεται το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+0.5)(s+4)}$$

με $K > 0$.

Να σχεδιαστεί το διάγραμμα Nyquist και να υπολογιστεί η τιμή της ενίσχυσης K , ώστε το σύστημα να έχει περιθώριο ενίσχυσης $K_g = 20db$.

Άσκηση A5.5

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{(s+2)(s^2+2s+2)}, \quad K > 0$$

Άσκηση A5.6

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K(s+3)}{(s+2)^2}, \quad K > 0$$

Άσκηση A5.7

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)^2}, \quad K > 0$$

Άσκηση A5.8

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)^2}, \quad K > 0$$

Άσκηση A5.9

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς βρόχου

$$G(s)F(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)^2}, \quad K > 0$$